1

すべての実数で微分可能な関数$f(x)$, $g(x)$とそれぞれの導関数$f'(x)$, $g'(x)$が関係式

$f'(x)=g(x)$　,　$g'(x)=-f(x)$　をみたすとする。

(1)　$F(x)=f(x)\cos x-g(x)\sin x$　,　$G(x)=f(x)\sin x+g(x)\cos x$

で定義された関数$F(x)$, $G(x)$に対して、それぞれの導関数$F'(x)$, $G'(x)$を計算せよ。

(2)　$f(0)=1$, $g(0)=0$ のとき、$f(x)$, $g(x)$はどのような関数か。

(解説)

(1)　$F'(x)=f'(x)\cos x-f(x)\sin x-g'(x)\sin x-g(x)\cos x$

$=g(x)\cos x-f(x)\sin x+f(x)\sin x-g(x)\cos x=0$

$G'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x+g'(x)\cos x-g(x)\sin x$

$=g(x)\sin x+f(x)\cos x-f(x)\cos x-g(x)\sin x=0$

以上より　$\underline{F'(x)=0,\ G'(x)=0}$

(2)　与式に$x=0$を代入すると

$F(0)=f(0)\cos 0-g(0)\sin 0=1$　　$G(0)=f(0)\sin 0+g(0)\cos 0=0$

(1)の結果　$F'(x)=0$　$G'(x)=0$　より

$F(x)=f(x)\cos x-g(x)\sin x=1$ ……①

$G(x)=f(x)\sin x+g(x)\cos x=0$ ……②　　2式を連立して

①$\times\cos x+$②$\times\sin x$ より　$\underline{\therefore f(x)=\cos x}$

①$\times\sin x-$②$\times\cos x$ より　$\underline{\therefore g(x)=-\sin x}$

2

自然数nに対して次のようにおく。

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\quad,\quad b_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)$$

(1)　$n\geqq 2$のとき、$a_n<a_{n-1}$, $b_n>b_{n-1}$ を示せ。

不等式 $1.09<\log 3<1.1$ を用いて、(2), (3)に答えよ。

(2)　$n\geqq 2$のとき、$b_n>0.4$ を示せ。

(3)　$n\geqq 3$のとき、$0.4<a_n<0.75$ を示せ。

(解説)

(1)
$$\begin{cases} a_n<a_{n-1} \Leftrightarrow \log n-\log(n-1)-\dfrac{1}{n}>0 \\ b_n>b_{n-1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{n}+\log n-\log(n+1)>0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$　$\log(n+1)-\log n<\dfrac{1}{n}<\log n-\log(n-1)$　を $n\geqq 2$ で示せばよい.

$n-1\leqq x\leqq n$ のとき

$$\frac{1}{x}\geqq\frac{1}{n}\ \Rightarrow\ \int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}dx>\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n}dx\ \Leftrightarrow\ \log n-\log(n-1)>\frac{1}{n}$$

$n\leqq x\leqq n+1$のとき

$$\frac{1}{x}\leqq\frac{1}{n}\ \Rightarrow\ \int_{n}^{n+1}\frac{1}{x}dx<\int_{n}^{n+1}\frac{1}{n}dx\ \Leftrightarrow\ \log(n+1)-\log n<\frac{1}{n}$$

より題意は示された. □

(2)　$b_2=1+\dfrac{1}{2}-\log 3>\dfrac{3}{2}-1.1=0.4$ ($\because$　$\log 3<1.1$) である.

(1) より $n\geqq 2$ で, $b_{n-1}<b_n$ であるから, $0.4<b_2<b_3<\cdots\cdots$

つまり, $n\geqq 2$ で $0.4<b_n$ は示せた.　□

(3)　$a_n-b_n=\log(n+1)-\log n>0$ が成り立つから, $n\geqq 2$ にて $a_n>b_n>0.4$ である.

また, $a_3=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\log 3<\dfrac{11}{6}-1.09$ ($\because$　$\log 3>1.09$)

$$<1.84-1.09\left(\because\ \frac{11}{6}=1.83666\cdots\right)$$

(1) より $n\geqq 2$ で $a_{n-1}\geqq a_n$ であるから, $0.75>a_3>a_4>\cdots$

つまり $n\leqq 3$ で $a_n<0.75$ が示せた.　　以上より, 題意は示せた. □

3

空間の原点をO(0, 0, 0)とする。3点A(2, 2, 3), B(−1, 4, 2), C(2, −4, −3)を通る平面をαとする。

(1) 空間の点Pが平面αの上にあるためには、実数s, tが存在して

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+(1-s-t)\overrightarrow{OC}$ となることが必要十分であることを示せ。

(2) 平面αがx軸, y軸, z軸と交わる点をK, L, Mとする。この3点の座標を求めよ。

解説

(1) いま, $\overrightarrow{CA}=\begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}-3\\8\\5\end{pmatrix}$ より $\overrightarrow{CA}\not\parallel\overrightarrow{CB}$ であるから

「点Pが平面α上に存在する.」

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{CP}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$ を満たす実数s, tが存在する.

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+(1-s-t)\overrightarrow{OC}$ を満たす実数s, tが存在する. □

(2) K(x, 0, 0), L(0, y, 0), M(0, 0, z)とおく. (1)により

$$\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\8\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix}$$

をs, t, xについて解いて, $x=1$　　∴ K(1, 0, 0)

L, Mについても同様に

$$\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\8\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix}$$ より　L(0, 1, 0)

$$\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\8\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix}$$ より　M(0, 0, −1)

4

すべての実数で$f(x)$は連続な導関数$f'(x)$をもつ関数として、$g(x)=\int_{-1}^{1}f'(t)f(x-t)dt$

とおく。一般に関数$h(x)$において、常に$h(-x)=h(x)$が成り立つとき$h(x)$は偶関数、常に$h(-x)=-h(x)$が成り立つとき$h(x)$は奇関数であるという。

(1) $f(x)$が偶関数ならば$f'(x)$は奇関数、$f(x)$が奇関数ならば$f'(x)$は偶関数であることを示せ。

(2) $f(x)$が偶関数または奇関数であるとき、$g(x)$は奇関数であることを示せ。

(3) $f(x)=x^n$ (nは自然数)のとき$g(x)$は整式である。その$g(x)$の0でない最高次の項を求めよ。

解説

(1) $f(x)$が偶関数ならば、$f(-x)=f(x)$が成り立つので、辺々を微分して、

$f'(-x)=f'(x)$となる。したがって$f(x)$が偶関数ならば、$f'(x)$は奇関数となる。

$f(x)$が奇関数の場合も同様にすれば良い。

(2) $g(-x)=-g(x)$となることを示す。

①$f(x)$が偶関数のとき

$$g(-x)=\int_{-1}^{1}f'(t)f(-x-t)dt$$

$$=\int_{-1}^{1}f'(t)f(-(x+t))dt$$

$$=\int_{-1}^{1}f'(t)f(x+t)dt \quad -(*) \qquad (f(x)\text{は偶関数より})$$

ここで、$t=-u$と置換すると、$dt=-du$、

t	-1 → 1
u	1 → -1

となるので、

$$(*)=\int_{1}^{-1}f'(-u)f(x-u)(-du)$$

$$=\int_{-1}^{1}f'(-u)f(x-u)du$$

$$=-\int_{-1}^{1}f'(u)f(x-u)du \qquad (f(x)\text{が偶関数}\Leftrightarrow f'(x)\text{は奇関数より})$$

$=-g(x)$となる。したがって$g(-x)=-g(x)$が示された。

②$f(x)$が奇関数のときも①$f(x)$が偶関数のときと同様に行えば証明出来る。

(3) $f(x)=x^n$より$g(x)$は

$g(x)=\int_{-1}^{1}nt^{n-1}(x-t)^n dt$と表される。

$(x-t)^n=\sum_{k=1}^{n}{}_nC_k x^k(-t)^{n-k}$より

①nが奇数のとき、$n=2m-1$　$(m=1,2,\cdots)$と表される。

$$(\ g(x)\text{の最高次の項})=\int_{-1}^{1}(2m-1)t^{2m-2}x^{2m-1}dt$$
$$=2x^{2m-1}\underline{=2x^n}$$

②nが偶数のとき、$n=2m$　$(m=1,2,\cdots)$と表される。

$$(\ g(x)\text{の最高次の項})=\int_{-1}^{1}2mt^{2m-1}x^{2m-1}dt$$
$$=\frac{-8m^2}{2m+1}x^{2m-1}=\underline{\frac{-2n^2}{n+1}x^{n-1}}$$

5

1, 2, 3 の目がそれぞれ2面ずつに書かれたさいころがある。数直線上の点x (xは整数) に置かれた石を次のような操作Aで別の点に移動させる。

点xに置かれた石に対する操作A：上のさいころを投げて出た目をZ $(1\leqq Z\leqq 3)$とする。
$x\geqq 0$ならば石を点$(x-Z)$に移動させ、$x<0$ならば点$(x+Z)$に移動させる。

始めに石を数直線の原点Oにおく。1回目の操作Aで石が移動した点をX_1とする。これを繰り返し、点X_{n-1}に置かれた石に対してn回目の操作Aを行って石が移動した点をX_nとする。

(1)　事象$X_n=0$が起きる確率をp_nとおく$(n\geqq 1)$。数列$\{p_n\}$は、
初項$p_1=0$と漸化式 $p_{n+1}=\frac{1}{3}(1-p_n)$ $(n\geqq 1)$ をみたすことを示せ。

(2)　(1)の初項と漸化式で定められる数列$\{p_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　事象$X_n=-3$が起きる確率をq_nとおく$(n\geqq 1)$。q_nをnを用いて表せ。

(解説)

(1)　1回目の操作で，$X_1=-Z$　$(Z=1,2,3)$　となるため，$X_1\neq 0$　ゆえに　$\underline{p_1=0}$

$X_{n+1}=0$　となるには，$X_n\neq 0$　かつ $(n+1)$回目の操作で　$Z=|X_n|$となればよいので，　$\underline{p_{n+1}=\frac{1}{3}(1-p_n)}$

(2) $p_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{4}\right)$を変形して，$p_n-\frac{1}{4}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(p_1-\frac{1}{4}\right)$

$p_1=0$より，$\underline{p_n=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}$

(3) $X_{n+1}=-3$ が起きるのは，$X_n=0$ かつ $Z=3$ となるときより，

$$q_{n+1}=\frac{1}{3}p_n=\frac{1}{12}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\ (n\geqq 1)$$

よって，$q_n=\frac{1}{12}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}\ (n\geqq 2)$　$\cdots(*)$

ここで，q_1は，　$n=1$において$Z=3$であればよいので，$q_1=\frac{1}{3}$

また，$n=1$ のときも$(*)$は成立する。

よって，$\underline{q_n=\frac{1}{12}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}\ (n\geqq 1)}$

講評

今年は5題中3題が数Ⅲとなりこの分野の出題率が高まったが，数Ⅲと確率が定番である本大学の特色はそのままであった．また，第3問はひさびさの空間ベクトルからの出題であったが，テーマは頻出内容であったので正答できた受験生は多かったことだろう．

ただし，全体としては，第1問をのぞき証明（論証）問題が多く，100分の試験時間はとても短く感じたことだろう．

今回のセットでは，第4問がやや難度が高いため，第1問，第3問，第5問を完答することが重要であり，第2問の正答率が合否を分けることになるだろう．