進学塾ビッグバン
BIG BANG

解答速報　数学

2016年度　大阪医科大学　一般入学試験

I

(1) $u+v=3$ より $v=3-u$ であり，$v\geqq 1$ より $u\leqq 2$

よって，$1\leqq u\leqq 2$ …①

$$
\begin{aligned}
uv &= u(3-u)\\
&= -u^2+3u\\
&= -\left(u-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

ゆえに，①の範囲で uv の範囲は，$2\leqq uv\leqq \dfrac{9}{4}$

(2)条件より，$u\geqq 1$，$v\geqq 1$，$u+v=3$ であるから，(1)より $2\leqq t\leqq \dfrac{9}{4}$ …②

$u=\sqrt{1+x^2}$ より $x^2=u^2-1$

同様にして，$y^2=v^2-1$

よって，
$$
\begin{aligned}
x^2y^2 &= (u^2-1)(v^2-1)\\
&= (uv)^2-(u^2+v^2)+1\\
&= (uv)^2-\{(u+v)^2-2uv\}+1\\
&= t^2-9+2t+1\\
&= t^2+2t-8
\end{aligned}
$$

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ より xy は正であるから，

$$xy=\sqrt{t^2+2t-8}$$

(3)
$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2+y^2+2xy\\
&= (u^2-1)+(v^2-1)+2\sqrt{t^2+2t-8}\\
&= (u+v)^2-2uv-2+2\sqrt{t^2+2t-8}\\
&= 9-2t-2+2\sqrt{t^2+2t-8}\\
&= 2\sqrt{t^2+2t-8}-2t+7
\end{aligned}
$$

(4) $(x+y)^2=f(t)$ とおくと，

$$f(t)=2\sqrt{t^2+2t-8}-2t+7$$

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= 2\times\frac{2t+2}{2\sqrt{t^2+2t-8}}-2\\
&= \frac{2\left(t+1-\sqrt{t^2+2t-8}\right)}{\sqrt{t^2+2t-8}}\\
&= \frac{2\left\{t+1-\sqrt{(t+1)^2-9}\right\}}{\sqrt{t^2+2t-8}}>0
\end{aligned}
$$

よって，$f(t)$ は単調増加であるから，

$f(2)=3$，$f\left(\dfrac{9}{4}\right)=5$ より，②の範囲で，$3\leqq f(t)=(x+y)^2\leqq 5$

ここで，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ より $x+y\geqq 0$ であるから，$\sqrt{3}\leqq x+y\leqq\sqrt{5}$

Ⅱ

(1) $G(a,b)=g$ とおき，$a=gA, b=gB$ とおく。

このとき，A, B は互いに素な自然数である。

$a-b=g(A-B)$，$b=gB$ は，g を公約数としてもつので，$A-B$，B が互いに素であることを示せばよい。

背理法：$A-B=g'C$，$B=g'D$ ($g'>1$，C, D:互いに素な自然数) と表されると仮定。

このとき，$A=g'(C+D)$ となり，A, B はg' を公約数に持つことになり，互いに素であることに矛盾。

よって，$A-B, B$ は互いに素となり，$G(a,b)=G(a-b,b)$ が成り立つ。

(2) $(1+\sqrt{3})^{n+2}=(1+\sqrt{3})^2(1+\sqrt{3})^n$

$p_{n+2}+q_{n+2}\sqrt{3}=(4+2\sqrt{3})(p_n+q_n\sqrt{3})$

$p_{n+2}+q_{n+2}\sqrt{3}=(4p_n+6q_n)+(2p_n+4q_n)\sqrt{3}$

よって，$p_{n+2}=2(2p_n+3q_n)$，$q_{n+2}=2(p_n+2q_n)$

ここで，p_n，q_n が自然数であることと，(1) より

$$\begin{aligned}G(2p_n+3q_n,\ p_n+2q_n)&=G(p_n+2q_n,\ p_n+q_n) &&(\because 2p_n+3q_n>p_n+2q_n)\\&=G(p_n,\ p_n+q_n) &&(\because p_n+2q_n>p_n+q_n)\\&=G(p_n,\ q_n) &&(\because p_n+q_n>p_n)\end{aligned}$$

したがって，$G(p_{n+2},\ q_{n+2})=2G(p_n,\ q_n)$

(3) $a_n=G(p_n,\ q_n)$ とおくと，$a_{n+2}=a_n$ である。

また，$p_1=1,\ q_1=1$ より，$a_1=1$

$(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$ で，$p_2=4,\ q_2=2$ より，$a_2=2$

(i) $n=2m-1$ のとき，$a_{2m+1}=2a_{2m-1}$ であり，等比数列の一般項より，

$$a_{2m-1}=2^{m-1}a_1=2^{m-1}$$

$$\therefore\quad a_n=2^{\frac{n-1}{2}}$$

(ii) $n=2m$ のとき，$a_{2m+2}=2a_{2m}$ であり，等比数列の一般項より，

$$a_{2m}=2^{m-1}a_2=2^m$$

$$\therefore\quad a_n=2^{\frac{n}{2}}$$

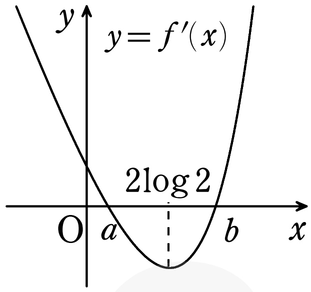
以上より，$\begin{cases}G(p_n,\ q_n)=2^{\frac{n-1}{2}} & (n:\text{奇数})\\ G(p_n,\ q_n)=2^{\frac{n}{2}} & (n:\text{偶数})\end{cases}$

Ⅲ

(1)　$f'(x)=e^x-4x$，$f''(x)=e^x-4$ である。

$f''(x)=0$ となるのは$x=2\log 2$ であり，このとき，$f'(x)$ は極小値をとる。

$f'(2\log 2)=4-8\log 2=4\log\dfrac{e}{4}<4\log\dfrac{2\sqrt{2}}{4}<0$



$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f'(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x-4x)=\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x)=\lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{4}{x}\right)=\infty$

であるから，$y=f'(x)$ のグラフは右のようになり、

$f'(x)=0$ は2実解を持つ。

(2)　$f'(0)=1>0$，$f'(2)=e^2-8=e^2-(2\sqrt{2})^2<0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty$ より，

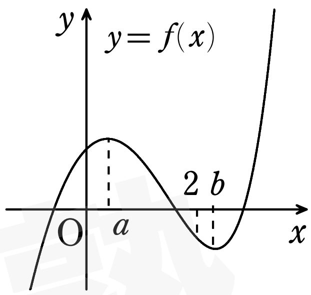
$0<x<2$ および $2<x$ に$f'(x)=0$ は1つずつ解をもつので，$0<a<2<b$ である。

(3)　$f(x)$ は，$x=a$ で極大値，$x=b$ で極小値をとる。

ここで，

$f(0)=1$

$f(2)=e^2-8=e^2-(2\sqrt{2})^2<0$



$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x-2x^2)=-\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-2\right)=\infty$

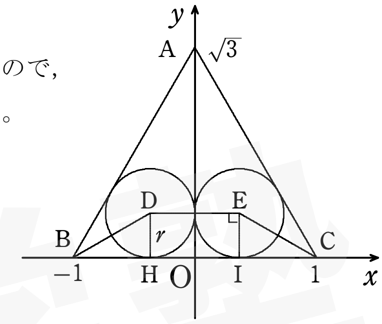
より，$y=f(x)$ グラフは右のようになり，$f(x)=0$ は異なる3実解をもつ。

Ⅳ

(1)　BCの中点をOとし，ABに接する円の中心をD，ACに接する円の中心をE，
円D, Eと辺BCの接点を，それぞれH, Iとする。
円D，Eの半径をrとすると，
△BDHと△CEIは30°，60°，90°の直角三角形なので，
$BH=CI=\sqrt{3}\,DH=\sqrt{3}\,r$，$HI=DE=2r$である。
よって，BCについて

$$2r+2\sqrt{3}\,r=2$$

$$\therefore\quad r=\frac{2}{2(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$



(2)　Oを原点とし，直線BCがx軸になるように座標をとる。
$A(0,\ \sqrt{3})$，$B(-1,0)$，$C(1,0)$である。
円Dの方程式は　$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$
円Eの方程式は　$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$
$0\leqq k\leqq 2r$ に対して，直線$y=k$で円Dを切断すると

$$(x-r)^2=r^2-(k-r)^2$$

$$\therefore\quad x=r\pm\sqrt{r^2-(k-r)^2}$$

よって，直線$y=k$で切断した図形をy軸周りに回転した面積を$S(k)$とおくと，

$$S(k)=\pi\left\{\left(r+\sqrt{r^2-(k-r)^2}\right)^2-\left(r-\sqrt{r^2-(k-r)^2}\right)^2\right\}$$
$$=4\pi r\sqrt{r^2-(k-r)^2}$$

よって，回転体の体積Vは

$$V=\int_0^{2r}S(y)\,dy$$
$$=\int_0^{2r}4\pi r\sqrt{r^2-(y-r)^2}\,dy$$

ここで，$y-r=r\sin\theta$ とおくと，

$dy=r\cos\theta\,d\theta$　，

y	0	$\to$	$2r$
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

$$V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\pi r^3\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\pi r^3(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\pi r^3\Big[2\theta+\sin 2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi r^3[\{\pi+\sin\pi\}-\{(-\pi)+\sin(-\pi)\}]$$
$$=2\pi^2r^3$$

$r=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ を代入して，$V=2\pi^2\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^3=\dfrac{3\sqrt{3}-5}{2}\pi^2$

V

(1)　すべてのカードを区別して考えると、取り出し方は　${}_{10}\mathrm{C}_2=45$(通り)
その中で$A=6$となるのは2枚のカードが$(1,5)(2,4)(3,3)$の組み合わせのときであるから

$$\frac{(2\times2)\times2+1}{45}=\frac{1}{5}$$

(2)　$A\leqq5$ のとき、$B=6$ となるのは
(i)　1回目$(1,1)$を引き、2回目に$\boxed{4}$を引く
(ii)　1回目$(1,2)$を引き、2回目に$\boxed{3}$を引く
(iii)　1回目$(1,3)$を引き、2回目に$\boxed{2}$を引く
(iv)　1回目$(2,3)$を引き、2回目に$\boxed{1}$を引く
(v)　1回目$(1,4)$を引き、2回目に$\boxed{1}$を引く

(i)の場合の確率は　$\dfrac{1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\dfrac{2}{8}$

(ii)、(iii)、(iv)の場合の確率は　$\dfrac{2\times2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\dfrac{2}{8}$

(v)の場合の確率は　$\dfrac{2\times2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\dfrac{1}{8}$

であるから、合わせて　$\dfrac{2+8\times3+4}{{}_{10}\mathrm{C}_2\times8}=\dfrac{1}{12}$

(1)の場合も合わせて、当たりとなる確率は　$\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{17}{60}$

進学塾ビッグバン
BIG BANG

解答速報　数学

2016 年度　大阪医科大学　一般入学試験

【　講　評　】

昨年より手のつけやすい問題のセットであった。例年通り数Ⅲ中心で、確率も出題されていた。
整数の論証は、完全に新課程に移行した今年のトピック問題である。
合格するためには 7 割以上の正答率が望ましい。

1　微分	難易度：　並
(2),(3)は u と v の対称式を基本対称式で表すだけで、(4)は(3)をもとに微分を利用して範囲を求めればよい。若干(4)の計算に戸惑うかもしれないが、確実に解いてほしい。	
2　整数、数列	難易度：　並
(1)の証明はユークリッドの互除法をテーマにしたものである。(2),(3)は p_n と q_n の漸化式をもとに(1)を利用する。今回の 5 題の中では一番解きづらいと思われる。	
3　微分	難易度：　並
方程式の実数解の個数をグラフを利用して考える問題で、大医受験生ならば解いたことのあるものであろう。ここは必ず得点してほしい。	
4　平面図形、積分	難易度：　並
レギュラー授業でもよく扱った座標設定を利用する回転体の問題である。(2)の計算は工夫をしなければ複雑であり、解きづらいと思われる。	
5　確率	難易度：　並
「10 枚のカードから 2 枚ひく」というよくある設定である。3 枚目をひく時の場合分けさえしっかりできれば難問ではないので確実に解いてほしい。	