進学塾ビッグバン
BIG BANG

解答速報　数学

2017 年度　大阪医科大学（前期）　一般入学試験

1

(1) $\left(0\,,\dfrac{1}{e}\right)$ $(t=\pm1)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2te^{-t^2}}{3t^2-1}=\begin{cases}\dfrac{-\dfrac{2}{e}}{2}=-\dfrac{1}{e} & (t=1)\\[2ex] \dfrac{2e^{-1}}{2}=\dfrac{1}{e} & (t=-1)\end{cases}$$

(2) x 軸と平行　$\dfrac{dy}{dt}=-2te^{-t^2}=0\ \rightarrow\ t=0\,,x=0\,,y=1$

y 軸と平行　$\dfrac{dx}{dt}=3t^2-1=0\ \rightarrow\ t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,,x=\mp\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\,,y=e^{-\frac{1}{3}}$　(複号同順)

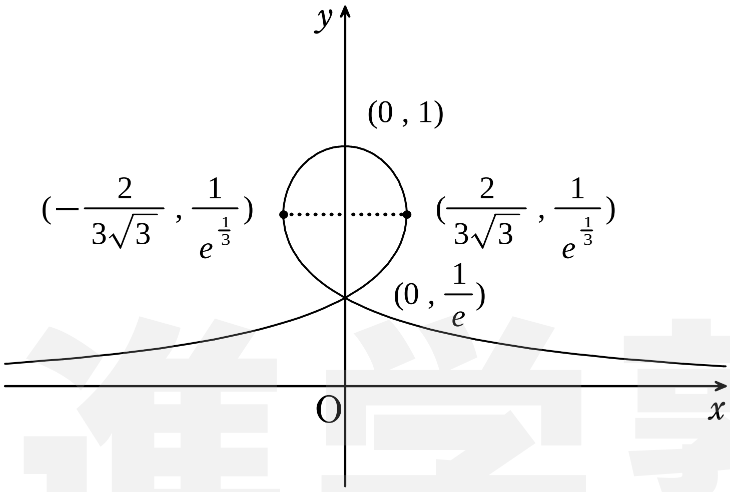
(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2te^{-t^2}}{3t^2-1}$ より，

$t<-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 0<t<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $\dfrac{dy}{dx}>0$

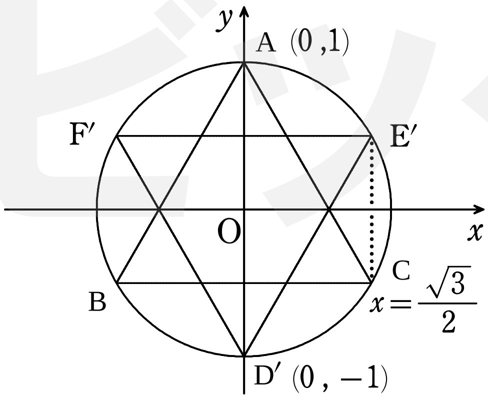
$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<t<0,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}<t$ のとき $\dfrac{dy}{dx}<0$

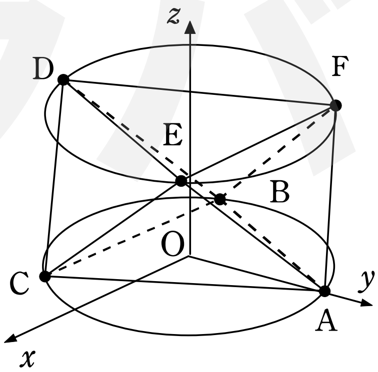
(4)　増減表をかくと下のようになる。

t	$-\infty$	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	∞
$\dfrac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{dy}{dt}$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\infty\\0\end{pmatrix}$	$\nearrow$	$\begin{pmatrix}\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\\\dfrac{1}{e^{\frac{1}{3}}}\end{pmatrix}$	$\nwarrow$	$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\swarrow$	$\begin{pmatrix}-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\\\dfrac{1}{e^{\frac{1}{3}}}\end{pmatrix}$	$\searrow$	$\begin{pmatrix}\infty\\0\end{pmatrix}$



2

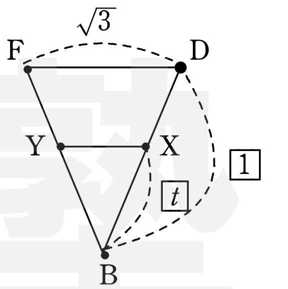




(1)　平面 $z=t$ と線分BF，BDの交点を点X，Yとする．

このとき△BDF∽△BXYであり，相似比 $1:t$ であるから

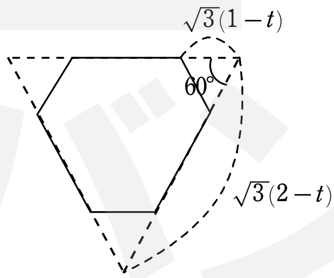
$XY=tDF=\sqrt{3}\,t$



(2)　八面体 K の平面 $z=t$ による切り口の面積を $S(t)$ とすると

$$S(t)=\frac{1}{2}\{\sqrt{3}(2-t)\}^2\sin 60^\circ-3\cdot\frac{1}{2}\{\sqrt{3}(1-t)\}^2\sin 60^\circ$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}(-2t^2+2t+1)$$



(3)　八面体 K の体積を V とすると

$$V=\int_0^1\frac{3\sqrt{3}}{4}(-2t^2+2t+1)dt=\frac{3\sqrt{3}}{4}\left[-\frac{2}{3}t^3+t^2+t\right]_0^1=\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(2-\frac{2}{3}\right)=\sqrt{3}$$

3

(1)　△ABC：△ACM＝BM:CM であり，

$\triangle \mathrm{ABC} : \triangle \mathrm{ACM} = \frac{1}{2}\cdot c\cdot \mathrm{AM}\cdot \sin\frac{A}{2} : \frac{1}{2}\cdot b\cdot \mathrm{AM}\cdot \sin\frac{A}{2} = c:b$ より，

$\mathrm{BM}:\mathrm{CM} = c:b$

(2)　$\mathrm{BM}=\frac{ac}{b+c}$ より $\mathrm{AI}:\mathrm{IM}=c:\frac{ac}{b+c}=(b+c):a$

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{b+c}{a+b+c}\cdot\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b+c}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{a+b+c}$$

ここで、（左辺）$=a\overrightarrow{\mathrm{IA}}+b\overrightarrow{\mathrm{IB}}+c\overrightarrow{\mathrm{IC}}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}-(a+b+c)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI}}$

$=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}-(a+b+c)\cdot\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{a+b+c}=\vec{0}=$（右辺）

(3)　$a\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|^2+b\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|^2+c\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|^2$

$=(a+b+c)\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2-2\left(b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+b\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+c\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$

$=(a+b+c)\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{a+b+c}\right|^2+$定数

よって、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{a+b+c}=\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ で最小となる

4

(1)　(i)　$a=0$ のとき

袋の中は赤玉0個，白玉20個なので，$P(a)=1$

(ii)　$a=17$ のとき

袋の中は赤玉17個，白玉3個なので，$P(a)=\dfrac{{}_{17}C_1\cdot{}_3C_3}{{}_{20}C_4}=\dfrac{24}{20\cdot19\cdot18}$

(iii)　$a\geqq18$ のとき

袋の中に白玉が2個以下なので，$P(a)=0$

(iv)　$0\leqq a\leqq16$ のとき

4個中赤が0個または1個となればよいので，

$$P(a)=\frac{{}_{20-a}C_4+{}_aC_1\cdot{}_{20-a}C_3}{{}_{20}C_4}=\frac{(20-a)(19-a)(18-a)(3a+17)}{20\cdot19\cdot18\cdot17}$$

なお，これに$a=0$ を代入すると$\dfrac{20\cdot19\cdot18\cdot17}{20\cdot19\cdot18\cdot17}=1$

$a=17$ を代入すると$\dfrac{3\cdot2\cdot1\cdot68}{20\cdot19\cdot18\cdot17}=\dfrac{24}{20\cdot19\cdot18}$

$a=18,\ 19,\ 20$ を代入すると0

(i)～(iv) より，$0\leqq a\leqq20$ で $P(a)=\dfrac{(20-a)(19-a)(18-a)(3a+17)}{116280}$ と表わせ，

$P(a)$ はa の多項式である。

(2)　$P(a+1)-P(a)$

$$=\frac{(19-a)(18-a)(17-a)(3a+20)-(20-a)(19-a)(18-a)(3a+17)}{116280}$$

$$=\frac{(19-a)(18-a)\{(17-a)(3a+20)-(20-a)(3a+17)\}}{116280}$$

$$=\frac{-12a(19-a)(18-a)}{116280}$$

よって，

$a=0,\ 18,\ 19$ のとき$P(a)=P(a+1)$

$a=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 17$ のとき $P(a)>P(a+1)$

(3)　(2) より，$P(a)$ は減少関数となる。

$P(0)=1$（>0.95）

$P(1)=\dfrac{19\cdot18\cdot17\cdot20}{20\cdot19\cdot18\cdot17}=1$ (>0.95)

$P(2)=\dfrac{18\cdot17\cdot16\cdot23}{20\cdot19\cdot18\cdot17}=\dfrac{92}{95}$（$=0.968\cdots>0.95$）

$P(3)=\dfrac{17\cdot16\cdot15\cdot26}{20\cdot19\cdot18\cdot17}=\dfrac{52}{57}$（$=0.912\cdots<0.95$）

よって，$a=0$，1，2

5

(1) $\triangle$OMRと$\triangle \mathrm{OM_1R}$において　ORは共通･･･①

またOM,$\mathrm{OM_1}$はそれぞれ弦AB,$\mathrm{A_1B_1}$の垂直二等分線より

$\angle \mathrm{OMR} = \angle \mathrm{OM_1R} = 90^\circ$　･･･②　$\mathrm{OM} = \mathrm{OM_1}$　･･･③

①②③より$\triangle \mathrm{OMR} \equiv \triangle \mathrm{OM_1R}$

(2)　AB の中点Mを表す複素数は$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ であり，

$\phi=\cos 2\theta + i\sin 2\theta$ とすると，$\mathrm{A_1}(\alpha\phi)$，$\mathrm{B_1}(\beta\phi)$ と表わせ

$\mathrm{A_1B_1}$ の中点$\mathrm{M_1}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\phi\right)$と表せる。

よって，$\angle \mathrm{MOM_1} = 2\theta$ であり，(1) より，$\angle \mathrm{MOR} = \angle \mathrm{M_1OR}$ であるから，

$\angle \mathrm{MOR} = \theta$

(3)　$\mathrm{M_1}$ はM より偏角が2θ 進んでいることと，$\angle \mathrm{MOR} = \theta$ かつ，Rの偏角はMと$\mathrm{M_1}$ の間にあることから，RはMよりも偏角がθ 進んでいるとわかる。また，$\dfrac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{\cos\theta}$ であるから，R を表す複素数をz とすると，

$$\frac{z}{\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z=\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{2\cos\theta}\cdot(\alpha+\beta) = \lambda(\alpha+\beta)$$

同様にして，P，Q も求まり，$\mathrm{P}((\beta+\gamma)\lambda)$，$\mathrm{Q}((\gamma+\alpha)\lambda)$，$\mathrm{R}((\alpha+\beta)\lambda)$

(4)　P，Q，R に対応する複素数をα'，β'，γ' とおく。

$\dfrac{\alpha'-\delta}{\alpha-\delta} = \dfrac{\beta'-\delta}{\beta-\delta} = \dfrac{\gamma'-\delta}{\gamma-\delta}$ となる$\mathrm{D}(\delta)$ が存在すればよい。

$\dfrac{\alpha'-\delta}{\alpha-\delta} = \dfrac{\beta'-\delta}{\beta-\delta}$ を満たすδ を求める。

$$(\alpha'-\delta)(\beta-\delta) = (\beta'-\delta)(\alpha-\delta)$$

$$\delta^2 - (\alpha'+\beta)\delta + \alpha'\beta = \delta^2 - (\alpha+\beta')\delta + \alpha\beta'$$

$$\{(\alpha-\beta) - (\alpha'-\beta')\}\delta = \alpha\beta' - \alpha'\beta$$

ここで，$\alpha' = (\beta+\gamma)\lambda$，$\beta' = (\gamma+\alpha)\lambda$ より，

$$(\alpha-\beta)(1+\lambda)\delta = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta+\gamma)\lambda$$

$$\therefore\quad \delta = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)\lambda}{1+\lambda}$$

同様に，$\dfrac{\beta'-\delta}{\beta-\delta} = \dfrac{\gamma'-\delta}{\gamma-\delta}$ を満たすδは，$\delta = \dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)\lambda}{1+\lambda}$ と表せる。

よって，Dは存在し，$\delta = \dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)\lambda}{1+\lambda}$

解答速報　数学

2017年度　大阪医科大学（前期）　一般入学試験

【　講　評　】

私立大医学部最難関校にふさわしい問題となり、昨年度より難化した。
１番,３番,４番は医学部受験生ならば解いた経験のある問題であろうから、ここで得点したい。
初等幾何についての重要性はレギュラー授業の中でもよく話していたが、２番,３番,５番と幾何的な問題が多いのも今年の特徴であろう。全体として６割程度は解けていてほしい。

1　微分	難易度：　標準
問題文の意味が読み取りづらかったかもしれないが、それさえわかれば標準的な媒介変数を用いた関数の問題である。誘導に上手く乗って、最後のグラフまで描いておきたい。	
2　積分	難易度：　やや難
図形をイメージするのが難しかったかもしれないが、(1)の考え方がわかれば切断面の面積から体積を求めるといういつもの求積問題となる。出来るかできないか大きく分かれる問題であろう。	
3　平面ベクトル	難易度：　標準
(1)は角の2等分線の性質の証明である。(2)(3)は始点をそろえて式を整理するという頻出問題であるから、確実に得点したい。	
4　確率	難易度：　標準
(1)は組合せから求める確率の問題である。(2)は確率の隣接する2項の間に成り立つ大小関係を、差を取ることから調べればよい。(3)は計算が大変であるが、単調性を考え地道に調べていこう。	
5　複素数平面	難易度：　やや難
(1)(2)は中学数学の三角形の合同条件を用いる問題。(3)(4)は複素数の積・商を用いた回転・拡大の問題である。誘導に従って、前の問題をどのように利用するか考えながら解いていくとよい。	