進学塾ビッグバン
BIG BANG

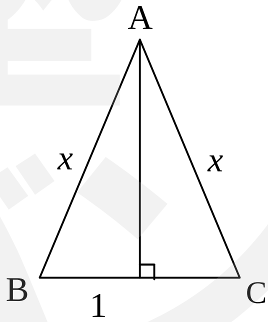
解答速報 数学

2017年度 近畿大学(後期) 一般入学試験

1

(1) 三角形の成立条件より、 $x+x>2$ $\therefore x>1$

(2) 余弦定理より、



$$\cos A=\frac{x^2+x^2-2^2}{2\times x\times x}=\frac{x^2-2}{x^2}$$

また△ABCは二等辺三角形より、$\cos B=\cos C=\dfrac{1}{x}$ となる

よって $\cos A+\cos B+\cos C=\dfrac{x^2-2}{x^2}+2\times\dfrac{1}{x}$

$$=-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x}+1\ (x>1)$$

ここで $\dfrac{1}{x}=t$ として $f(t)=-2t^2+t+1$ $(0<t<1)$とすると

$f(t)=-2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}$ だから、$f(t)$は $t=\dfrac{1}{2}$ つまり $x=2$ のときに最大値$\dfrac{3}{2}$をとる

(3) △ABCの面積より、$\dfrac{r(x+x+2)}{2}=\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{2}$ $\therefore r=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

正弦定理より $2R=\dfrac{x}{\sin B}$ $\therefore R=\dfrac{x^2}{2\sqrt{x^2-1}}$

よって $\dfrac{r}{R}=\dfrac{2(x^2-1)}{x^2(x+1)}=\dfrac{2(x-1)}{x^2}=2\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\right)$

(2)と同様に$\dfrac{1}{x}=t$ として$\dfrac{r}{R}=g(t)=-2t^2+2t=-2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$

よって $t=\dfrac{1}{2}$つまり$x=2$で最大値$\dfrac{1}{2}$となる。

$\boxed{2}$

$x^3-3x^2-{a_{n-1}}^2+a_{n-1}+4=0$ ………①

とする。

(1)　$n=2$ のとき，$a_1=0$ より，

　①：$x^3-3x^2+4=0$　　$(x+1)(x-2)^2=0$　　$\therefore$　$x=-1,\ 2$

　よって，$a_2=2$

(2)　$n=3$ のとき，$a_2=2$ より，

　①：$x^3-3x^2+2=0$　　$(x-1)(x^2-2x-2)=0$　　$\therefore$　$x=1,\ 1\pm\sqrt{3}$

　よって，$a_3=3$

(3)　$n=4$ のとき，$a_3=3$ より，

　①：$x^3-3x^2-2=0$ であり，$f(x)=x^3-3x^2-2$ とおくと，

　$f'(x)=3x(x-2)$ であり，極値 $f(0)=-2$，$f(2)=-6$ より，$f(x)=0$ の実数解は1つ。

　よって，$a_4=1$

　$n=5$ のとき，$a_4=1$ より，

　①：$x^3-3x^2+4=0$　　$\therefore$　$x=-1,\ 2$　$(\because\ (1))$

　よって，$a_5=2$

　以降，$a_6=3$，$a_7=1$，$a_8=2$，$a_9=3$，…… と続いてゆき，帰納的に

$$a_n=\begin{cases}0 & (n=0\text{ のとき})\\ 2 & (n=3m-1\text{ のとき})\\ 3 & (n=3m\text{ のとき})\\ 1 & (n=3m+1\text{ のとき})\end{cases}\quad (m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

　となる。$1000=3\times333+1$ であるから，

$$\sum_{k=1}^{1000}a_k=0+\sum_{m=1}^{333}(2+3+1)$$
$$=6\times333$$
$$=1998$$

(4)
$$\sum_{k=1}^{1000}ka_k=\sum_{m=1}^{333}\{2(3m-1)+3\times3m+1(3m+1)\}$$
$$=\sum_{m=1}^{333}(18m-1)$$
$$=18\times\frac{333\times334}{2}-333$$
$$=333(3006-1)$$
$$=1,000,665$$

(5)　$a_2\times a_3\times a_4\times\cdots\times a_{1000}=(2\times3\times1)^{333}=6^{333}$

　これに，常用対数をとると

$$\log_{10}6^{333}=333(\log_{10}2+\log_{10}3)$$
$$=333\times0.7781$$
$$=259.1073$$

　これより，$6^{333}=10^{259.1073}$ であり，$10^{259}<6^{333}<10^{260}$ を満たすので，6^{333} は260桁。

進学塾ビッグバン

3

$f(x)=x^3+3a^2x+3ax^2$ とおく。

(1) $f'(x)=3x^2+6ax+3a^2$ より，C の $x=t$ の点における接線の方程式は

$$y-(t^3+3at^2+3a^2t)=(3t^2+6at+3a^2)(x-t)$$

$$\therefore\quad y=(3t^2+6at+3a^2)x-2t^3-3at^2 \cdots\cdots\cdots①$$

① が $\mathrm{A}(a,\ b)$ を通るとき，

$$b=-2t^3+6a^2t+3a^3\ (\ =g(t)\ とおく\ )\cdots\cdots\cdots②$$

が成り立つ。いま

「①の本数」＝「② の解の個数」＝「$y=g(t)$，$y=b$ の交点の t の個数」

である。

$$g'(t)=-6t^2+6a^2$$
$$=-6(t-a)(t+a)$$

$a>0$ であるから，$g(t)$ は $t=\pm a$ で極値をもつ。

$g(a)=7a^3$，$g(-a)=-a^3$ より，接線の本数は

$$\begin{cases} -a^3<b<7a^3\ のとき\ 3本 \\ b=7a^3,\ -a^3\ のとき\ 2本 \\ b<-a^3,\ 7a^3<b\ のとき\ 1本 \end{cases}$$

(2) $b=-a^3\ (\ <0)$ のとき，

②：$-a^3=-2t^3+6a^2t+3a^3$

$2t^3-6a^2t-4a^3=0$

$2(t+a)^2(t-2a)=0$

$\therefore\quad t=-a,\ 2a$

$f'(-a)=0$，$f'(2a)=27a^2$ より，傾きの小さい l_1 は $t=-a$ のときで，

$l_1：y=-a^3$

$l_2：y=27a^2x-28a^3$

(3) (2) より，l_1 と l_2 の交点は $\mathrm{A}(a,\ -a^3)$ である。

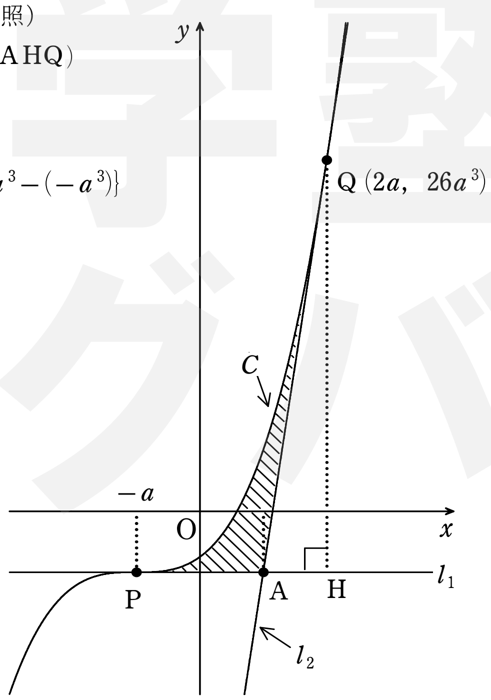
l_1 と C の接点を $\mathrm{P}(-a,\ -a^3)$，l_2 と C の接点を $\mathrm{Q}(2a,\ 26a^3)$ とし，

Q から l_1 に引いた垂線と l_1 の交点を $\mathrm{H}(2a,\ -a^3)$ とする。

求める面積を S とすると，（下のグラフ参照）

$S=(C,\ l_1,\ x=2a$ で囲まれる面積$)-(\triangle \mathrm{AHQ})$

$$=\int_{-a}^{2a}\{(x^3+3ax^2+3a^2x)-(-a^3)\}\,dx$$
$$-\frac{1}{2}\times(2a-a)\times\{26a^3-(-a^3)\}$$
$$=\int_{-a}^{2a}(x+a)^3\,dx-\frac{27}{2}a^4$$
$$=\left[\frac{1}{4}(x+a)^4\right]_{-a}^{2a}-\frac{27}{2}a^4$$
$$=\frac{1}{4}(3a)^4-\frac{27}{2}a^4$$
$$=\frac{27}{4}a^4$$



進学塾ビッグバン
BIG BANG

解答速報 数学

2017 年度　近畿大学(後期)　一般入学試験

【　講　評　】

本年度は医学部としての出題となり、60 分で穴埋め 2 問、記述 1 問となった。

各問の難易度は、標準的であるが、60 分という試験時間を考慮すると手際よく解きかつ、答案としてまとめていくのはなかなか難しいであろう。

3 問ともオーソドックスな出題ではあるが、大問[2](3)においては a_n を手早く推定することがカギであった。

また計算の数値も 6 ケタになるのであわてた諸君も多いのではないだろうか。

全体として大問[1][3]はミスできない。大問[2]も数列が n の式にならず値が循環することに気がついてくれれば後半はただの計算である。全体として 8 割は確保したい内容であると思われる。

$\boxed{1}$　三角比、2 次関数	難易度：　標準
三角比の知識を用いて、与えられた式の最大値を求めるという典型的な問題。 2 次関数に帰着していけば扱いやすい。	
$\boxed{2}$　3 次方程式、数列の和、整数	難易度：　やや難
a_n が、一般項として求められないので、推定して考えていくことが見えるかどうか。 和の処理は少しだけ計算量が多い。	
$\boxed{3}$　3 次関数の接線、積分法	難易度：　標準
接線の本数の問題としては、よくあるタイプである。文字での計算と場合分けはあるにしても後半の面積も含めて、一気にかたづけたい問題である。	