進学塾ビッグバン BIG BANG

解答速報 数学

2017 年度 日本医科大学 一般入学試験

[I]

問 1 $a_n = \frac{1}{3n-1}$ 問 2 $\frac{n(3n+7)}{20(3n+2)(3n+5)}$ 問 3 $\frac{1}{60}$

[II]

問 1 -1 問 2 -1 問 3 $\frac{z^2+1}{2z}$ 問 4 $\frac{z^4+1}{2z^2}$ 問 5 $\frac{z^6+1}{2z^3}$

問 6 $\frac{1}{8}$ 問 7 $\frac{1}{2}$

[III]

$\frac{2e^{\pi}}{\pi\log\pi}$

[IV]

問 1 $\frac{T}{S} = \frac{mn}{m^2+mn+n^2}$ 問 2 $M = \frac{1}{3}$，確率: $\frac{1}{6}$

問 3 最小値: $\frac{6}{43}$， $(m,n) = (1,6), (6,1)$

[V]

問 1 $p = \frac{a^2-d^2}{a-d\cos2\theta}$, $q = \frac{b^2-d^2}{b-d\cos\theta}$

問 2、問 3 略

進学塾ビッグバン BIG BANG

解答速報 数学

2017 年度 日本医科大学 一般入学試験

III

$$\lim_{x\to\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{(x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{(x^3-\sqrt{\pi}x^2+\pi x-\pi\sqrt{\pi})t^2\log t}dt$$
$$=\lim_{x\to\sqrt{\pi}}\frac{1}{x^3-\sqrt{\pi}x^2+\pi x-\pi\sqrt{\pi}}(x^2\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{e^{t^2}}{t^2\log t}dt+\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{\sqrt{\pi}te^{t^2}}{t^2\log t}dt)$$

において、$\frac{e^{t^2}}{t^2\log t}=f(t)$, $\frac{\sqrt{\pi}te^{t^2}}{t^2\log t}=g(t)$ とおくと、

$$\lim_{x\to\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{(x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{(x^3-\sqrt{\pi}x^2+\pi x-\pi\sqrt{\pi})t^2\log t}dt=\lim_{x\to\sqrt{\pi}}\frac{1}{(x^2+\pi)(x-\sqrt{\pi})}(x^2\int_{\sqrt{\pi}}^{x}f(t)dt+\int_{\sqrt{\pi}}^{x}g(t)dt)$$
$$=\lim_{x\to\sqrt{\pi}}\frac{1}{x^2+\pi}\cdot(x^2\cdot\frac{F(x)-F(\sqrt{\pi})}{x-\sqrt{\pi}}+\frac{G(x)-G(\sqrt{\pi})}{x-\sqrt{\pi}})$$

である。ただし、$F(x)$ および、$G(x)$ は関数 $f(x)$, $g(x)$ の原始関数の一つである。
また

$$\lim_{x\to\sqrt{\pi}}\frac{1}{x^2+\pi}=\frac{1}{2\pi}$$
$$\lim_{x\to\sqrt{\pi}}x^2=\pi$$
$$\lim_{x\to\sqrt{\pi}}\frac{F(x)-F(\sqrt{\pi})}{x-\sqrt{\pi}}=f(\sqrt{\pi})=\frac{e^{\pi}}{\pi\log\sqrt{\pi}}$$
$$\lim_{x\to\sqrt{\pi}}\frac{G(x)-G(\sqrt{\pi})}{x-\sqrt{\pi}}=g(\sqrt{\pi})=\frac{\pi e^{\pi}}{\pi\log\sqrt{\pi}}$$

であるので、

$$\lim_{x\to\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{(x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{(x^3-\sqrt{\pi}x^2+\pi x-\pi\sqrt{\pi})t^2\log t}dt=\frac{1}{2\pi}\cdot(\pi\cdot\frac{e^{\pi}}{\pi\log\sqrt{\pi}}+\frac{\pi e^{\pi}}{\pi\log\sqrt{\pi}})$$
$$=\underline{\frac{2e^{\pi}}{\pi\log\pi}}$$

進学塾ビッグバン BIG BANG

解答速報 数学

2017 年度 日本医科大学 一般入学試験

V

問 1

△ PFF' において、PF $= p$, FF' $= 2d$, PF' $= 2a - p$ であるので、余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}
(2a-p)^2 &= p^2 + 4d^2 - 4pd\cos 2\theta \\
\Leftrightarrow p^2 - 4ap + 4a^2 &= p^2 + 4d^2 - 4pd\cos 2\theta \\
\Leftrightarrow (a - d\cos 2\theta)p &= a^2 - d^2 \\
\Leftrightarrow p &= \underline{\frac{a^2-d^2}{a-d\cos 2\theta}}
\end{aligned}$$

同様にして、

$$q = \underline{\frac{b^2-d^2}{b-d\cos\theta}}$$

問 2

$\cos\theta = x$ とおくと、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき $0 < x < 1$ であり、

$$\begin{aligned}
\frac{q}{p} &= \frac{b^2-d^2}{a^2-d^2}\cdot\frac{a-d\cos 2\theta}{b-d\cos\theta} \\
&= \frac{b^2-d^2}{a^2-d^2}\cdot\frac{-2dx^2+a+d}{b-dx}
\end{aligned}$$

ここで、$f(x) = \frac{-2dx^2+a+d}{b-dx}$ とおくと

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-4dx(b-dx)+d(-2dx^2+a+d)}{(b-dx)^2} \\
&= \frac{2d^2x^2-4bdx+d(a+d)}{(b-dx)^2} \\
&= \frac{2d^2(x-\frac{b}{d})^2+d(a+d)-2b^2}{(b-dx)^2}
\end{aligned}$$

である。

$f'(x)$ の分母は常に正であり、分母において $2d^2 > 0$, 軸: $x = \frac{b}{d} > 1$, $f'(0) = \frac{d(a+d)}{b^2} > 0$, $f'(1) = \frac{d(3d-4b+a)}{(b-d)^2}$ であるので、$\frac{q}{p}$ が最大値をとるための条件は $f'(1) < 0$ となることである。

$$\begin{aligned}
f'(1) < 0 &\Leftrightarrow \frac{d(3d-4b+a)}{(b-d)^2} < 0 \\
&\Leftrightarrow 3d - 4b + a < 0 \\
&\Leftrightarrow \underline{d < \frac{4b-a}{3}}
\end{aligned}$$

さらにこれを満たす 実数 d が存在するための a, b の条件は $\frac{4b-a}{3} > 0 \Leftrightarrow \underline{a < 4b}$ である。

2017 年度 日本医科大学 一般入学試験

問 3

問 2 と同様に考える。

(i) $f'(1) > 0$ のとき

増減表は以下

x	(0)	$\cdots$	(1)
$f'(x)$	$(f'(0))$	$\cdots$	$(f'(1))$
$f(x)$	$(\frac{a+d}{b})$	$\nearrow$	$(f(1))$

よって、最小値を取らない。

(ii) $f'(1) > 0$ のとき

増減表は以下

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	(1)
$f'(x)$	$(f'(0))$	$\cdots$	0	$\cdots$	$(f'(1))$
$f(x)$	$(\frac{a+d}{b})$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$(f(1))$

ただし、$0 < x < 1$ において、$f'(x) = 0$ となる x を $x = \alpha$ とおいた。この場合も最小値は取らない。

以上 (i)(ii) より、$\frac{q}{p}$ は最小値を取らない。

進学塾ビッグバン
BIG BANG

解答速報 数学

2017 年度　日本医科大学　一般入学試験

【 講 評 】

例年の大問 3 問から大問 5 問へと変更され，分量は例年よりもやや多くなっている。全体的な難易度は例年通りであるが，量が増えたことを考慮すると，厳しい試験であると言える。［Ⅰ］［Ⅱ］［Ⅳ］を確実に得点した上で，［Ⅲ］，［Ⅴ］にどのくらい時間を割けたかが勝敗の分かれ目となる。

［Ⅰ］ 漸化式／無限級数	やや易
分数型漸化式（逆数をとる）から一般項を求め，数列の和，無限級数を計算する。確実に得点したい問題である。	
［Ⅱ］ 複素数平面（-1 の n 乗根）	標準
-1 の n 乗根に関する典型問題である。各設問の誘導に従って解答していけば，問題なく解答できるだろう。	
［Ⅲ］ 関数の極限（微分の定義式）	やや難
分母に積分区間の差が作れ，定積分が関数値の引き算になることから，微分の定義式を用いることに気付けるかがポイントである。	
［Ⅳ］ 平面図形／確率／微分法	標準
与えられた三角形の面積比を求め，この面積比の最大・最小値とそのときの確率を求める。$\dfrac{n}{m}$ または $\dfrac{m}{n}$ を変数とみることができるかどうかがポイントである。	
［Ⅴ］ 2 次曲線／微分法	やや難
p, q は△PFF'，△QFF'に注目し，余弦定理を用いれば求めることができる。次に，$\dfrac{q}{p}$ を θ の関数とみると，定義域が開区間となるので，(2)では極大値をもつ条件を求めればよい。(3)では極小値をもたないことを示せばよい。	