解答速報 数学

2015 年度 大阪医科大学 一般入学試験

$\boxed{1}$

(1)

$$\begin{array}{rl} a_n = & 1\cdot 2^{n-1}+2\cdot 2^{n-2}+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 2^1+n \\ -\ )\ 2a_n = & 1\cdot 2^n+2\cdot 2^{n-1}+3\cdot 2^{n-2}+\cdots\cdots+n\cdot 2^1 \\ \hline -a_n = & -(1\cdot 2^n+1\cdot 2^{n-1}+1\cdot 2^{n-2}+\cdots\cdots+1\cdot 2^1)\quad +n \end{array}$$

よって，$a_n=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$

(2) 第m群に含まれる4数は，a_{4m-3}，a_{4m-2}，a_{4m-1}，a_{4m} である。

このうちa_{4m-2}以外の項の5での剰余を考える。

$$\begin{aligned} a_{4m-3}=2^{4m-2}-(4m-3)-2=4^{2m-1}-4m+1 & \\ &=(5-1)^{2m-1}-4m+1 \\ &=(5^{2m-1}-\cdots+{}_{2m-1}\mathrm{C}_{2m-2}\cdot 5^1-1)-4m+1 \\ &=5M_1-4m \quad (M_1:\text{整数}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{4m-1}=2^{4m}-(4m-1)-2=4^{2m}-4m-1 & \\ &=(5-1)^{2m}-4m-1 \\ &=(5^{2m}-\cdots-{}_{2m}\mathrm{C}_{2m-1}\cdot 5^1+1)-4m-1 \\ &=5M_2-4m \quad (M_2:\text{整数}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{4m}=2^{4m+1}-4m-2=2\cdot 4^{2m}-4m-2 & \\ &=2\cdot(5-1)^{2m}-4m-2 \\ &=2\cdot(5^{2m}-\cdots-{}_{2m}\mathrm{C}_{2m-1}\cdot 5^1+1)-4m-2 \\ &=5M_3-4m \quad (M_3:\text{整数}) \end{aligned}$$

以上より，a_{4m-3}，a_{4m-1}，a_{4m} は5で割った余りは等しい。

なお，合同式を用いて表すと，$a_{4m-3}\equiv a_{4m-1}\equiv a_{4m}\equiv -4m \pmod 5$ である。

$\boxed{2}$

(1)　接弦定理より$\angle\mathrm{SAB}=\angle\mathrm{SCA}$，共通角より$\angle\mathrm{ASB}=\angle\mathrm{CSA}$。

これより，2角相等で$\triangle\mathrm{SAB}\backsim\triangle\mathrm{SCA}$

また，AB，CA が相似の対応辺となるから，$\triangle\mathrm{SAB}:\triangle\mathrm{SCA}=\mathrm{AB}^2:\mathrm{CA}^2=c^2:b^2$

(2)　(1) より，$\mathrm{BS}:\mathrm{CS}=\triangle\mathrm{SAB}:\triangle\mathrm{SCA}=c^2:b^2$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{BS}}=\dfrac{c^2}{b^2}\overrightarrow{\mathrm{CS}}$

$$b^2(\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=c^2(\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

$$(c^2-b^2)\overrightarrow{\mathrm{OS}}=c^2\overrightarrow{\mathrm{OC}}-b^2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{c^2\overrightarrow{\mathrm{OC}}-b^2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{c^2-b^2}$$

(3)　(2) と同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\dfrac{a^2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-c^2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a^2-c^2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\dfrac{b^2\overrightarrow{\mathrm{OB}}-a^2\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{b^2-a^2}$ である。

いま，　$(c^2-b^2)\overrightarrow{\mathrm{OS}}+(a^2-c^2)\overrightarrow{\mathrm{OT}}+(b^2-a^2)\overrightarrow{\mathrm{OU}}$

$$=(c^2\overrightarrow{\mathrm{OC}}-b^2\overrightarrow{\mathrm{OB}})+(a^2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-c^2\overrightarrow{\mathrm{OC}})+(b^2\overrightarrow{\mathrm{OB}}-a^2\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

$$=\vec{0}$$

であるから，$x=c^2-b^2$，$y=a^2-c^2$，$z=b^2-a^2$ と取ればよい。

なお，$\triangle\mathrm{ABC}$ は二等辺三角形ではないので，x，y，z はどれも0にならない。

(4)　(3) のx，y，z の和は

$x+y+z=(c^2-b^2)+(a^2-c^2)+(b^2-a^2)=0$ である。

よって，$z=-(x+y)$ を$x\overrightarrow{\mathrm{OS}}+y\overrightarrow{\mathrm{OT}}+z\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\vec{0}$ に代入して

$$x\overrightarrow{\mathrm{OS}}+y\overrightarrow{\mathrm{OT}}-(x+y)\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\vec{0}$$

$$\therefore\quad x\overrightarrow{\mathrm{US}}=-y\overrightarrow{\mathrm{UT}}$$

$x\neq 0$，$y\neq 0$ より，3点S，T，Uは同一直線上にある。

$\boxed{3}$

(1)　$L_\theta : (\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$

$\iff y=-\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)x+\dfrac{1}{\sin\theta}$　より交点を求める方程式は

$x^2-2ax+a^2-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\dfrac{1}{\sin\theta}$

$x^2+\left(-2a+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)x+a^2-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{\sin\theta}=0$　である。

これが重解をもつので，判別式をDとすると

$D=\left(-2a+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2-4\left(a^2-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{\sin\theta}\right)=0$

$-4a\times\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+1+\dfrac{4}{\sin\theta}=0$

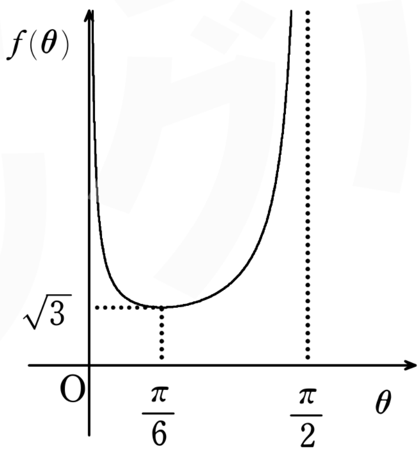
$\therefore\dfrac{\cos\theta}{4\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{4\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=a$

(2)　$f(\theta)=\dfrac{\cos\theta}{4\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{4\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}$　とおくと

$$
\begin{aligned}
f'(\theta)&=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{4\cos^2\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\\
&=\frac{4\sin^3\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}{4\cos^2\theta\sin^2\theta}\\
&=\frac{4\sin^3\theta+2\sin^2\theta-1}{4\cos^2\theta\sin^2\theta}\\
&=\frac{(2\sin\theta-1)(2\sin^2\theta+2\sin\theta+1)}{4\cos^2\theta\sin^2\theta}
\end{aligned}
$$

より，$f'(\theta)=0$ のとき$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ で$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

θ	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$	∞	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	∞



(3)　$y=f(\theta)$ と$y=a$ が共有点をもてばよいので　$a\geqq\sqrt{3}$

$\boxed{4}$

（1）

楕円Eと直線$y=x$が共有点を持つ時

$\dfrac{(x-1)^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$　より

$(a^2+b^2)x^2-2b^2x+b^2(1-a^2)=0\cdots[*]$

これが重解を持てばよいので

判別式$\dfrac{D}{4}=0$より

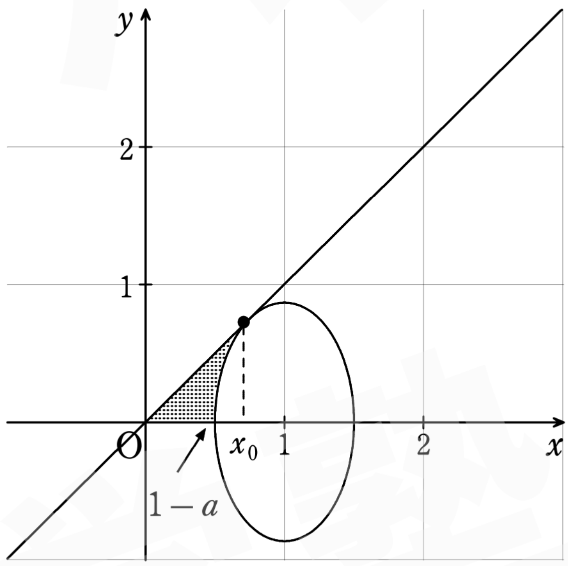
$b^4-(a^2+b^2)(b^2-a^2b^2)=0$

$\Leftrightarrow b^2-(a^2+b^2)(1-a^2)=0$　（$b^2\neq 0$より）

$\Leftrightarrow a^2+b^2-1=0$　（$a^2\neq 0$より）

a，bは正の数なので

$\therefore b=\sqrt{1-a^2}\cdots$答



また

$[*]\Leftrightarrow x^2-2(1-a^2)x+(1-a^2)^2=0$

$\Leftrightarrow\{x-(1-a^2)\}^2=0$

$\therefore x_0=1-a^2\cdots$答

（2）

$$V=\frac{\pi}{3}{x_0}^2\times x_0-\pi\int_{1-a}^{x_0}y^2\ dx$$

$$=\frac{\pi}{3}{x_0}^3-\pi\int_{1-a}^{1-a^2}b^2\left\{1-\frac{(x-1)^2}{a^2}\right\}dx$$

$$=\frac{\pi}{3}(1-a^2)^3-\pi\left[b^2x-\frac{b^2}{3a^2}(x-1)^3\right]_{1-a}^{1-a^2}$$

$$=\frac{\pi}{3}(1-a^2)^3-\pi\left\{(1-a^2)^2+\frac{a^4}{3}(1-a^2)-(1-a^2)(1-a)-\frac{a}{3}(1-a^2)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{3}(1-a^2)\{(1-a^2)^2-3(1-a^2)+3(1-a)+a(1-a^3)\}$$

$$=\frac{\pi}{3}(1-a^2)(a^2-2a+1)$$

$$=\frac{\pi}{3}(1-a^2)(1-a)^2$$

$$=\frac{\pi}{3}(1+a)(1-a)^3\ \cdots\text{答}$$

$\boxed{5}$

(1)　$p_2=\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，$q_2=\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{4}=\dfrac{7}{12}$，$r_2=\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{4}$

(2)　p_3：2個取り出した後で，箱の中に赤が0個，または，箱の中に赤が1個あって赤を取り出すときで，

$$p_3=p_2+q_2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{7}{36}=\frac{13}{36}$$

q_3：2個取り出した後で，箱の中に赤が1個あって青を取り出す，または，箱の中に赤が2個あって赤を取り出すときで

$$q_3=q_2\cdot\frac{2}{3}+r_2\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{18}+\frac{1}{8}=\frac{37}{72}$$

r_3：2個取り出した後で，箱の中に赤が2個あって青を取り出すときで

$$r_3=r_2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

(3)　(2) と同様にして，

$$p_n=p_{n-1}+\frac{1}{3}q_{n-1},\quad q_n=\frac{2}{3}q_{n-1}+\frac{1}{2}r_{n-1},\quad r_n=\frac{1}{2}r_{n-1}$$

(4)　$r_1=\dfrac{1}{2}$ であるから，等比数列の一般項で　$r_n=r_1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

(5)　$q_1=\dfrac{1}{2}$，$p_1=0$ である。

$q_n=\dfrac{2}{3}q_{n-1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \iff q_n+3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{2}{3}\left\{q_{n-1}+3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ と変形できる。

よって，等比数列の一般項より，

$$q_n+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(q_1+3\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\quad q_n=2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

また，$p_n=p_{n-1}+\dfrac{1}{3}\cdot q_{n-1}\ (n\geqq 2) \iff p_{n+1}=p_n+\dfrac{q_n}{3}\ (n\geqq 1)$

階差数列の一般項より

$$p_n=p_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^k-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}\quad (n\geqq 2)$$

$$=0+\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}-\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\quad (n\geqq 1\text{ で成立})$$

進学塾ビッグバン
BIG BANG

解答速報 数学

2015 年度　大阪医科大学　一般入学試験

【 講 評 】

標準的な問題ばかりで，解法でつまるようなものはなかったので，例年よりは解き易かったと思われる。

$\boxed{3}$，$\boxed{4}$は冷静に計算を進めていくことが大切である。

新旧課程のどちらの課程で学習した人にとっても不利はない問題であり，7 割程度の正答率を目指したい。

$\boxed{1}$. 数列，整数	難易度： 標準
(1)は(等差)×(等比)型の数列の和，(2)は剰余による分類に関する問題で，いずれも頻出の形である。	
$\boxed{2}$. 平面ベクトル，平面図形	難易度： 標準
(1) は円と相似に関する問題で，平面図形だけで考えられる。 (2) ～ (4)は(1)をもとに誘導に従っていけばよい。	
$\boxed{3}$. 図形と方程式，微分	難易度： 標準
円の接線の方程式については常識。(1)は放物線と直線が接する条件から求められ，(2)，(3)は微分してグラフをかけばよい。	
$\boxed{4}$. 2 次曲線，積分	難易度： 標準
(1) は楕円と直線が接することより，判別式を用いるだけである。 (2) はグラフの概形がわかれば，積分を用いて体積を求めればよい。 計算がうまくできたかどうかがポイントである。	
$\boxed{5}$. 確率，数列	難易度： 標準
大阪医科大でおなじみの確率漸化式の問題である。(1)，(2)で具体的に考えてから，(3)で一般化するだけなので，これは大医受験生はできてほしい問題である。	