進学塾ビッグバン
BIG BANG

解答速報　数学

2015 年度　杏林大学　一般入学試験

Ⅰ

アー9　イー1　ウー7　エー9　オー2

カー8　キー3　クー1　ケー4　コー3

サー3　シー9　スー8　セー4　ソー7

ター3　チー1　ツー4　テー1　トー2

Ⅱ

アー1　イー2　ウー4　エー1　オー1

カー2　キーー　クー2　ケーー　コー2

サー④

Ⅲ

アー①，⑤　イー④　ウー1　エー8　オー3

カー2　キー9　クー2　ケー9　コー5

サー2　シー9　スー2　セー5

Ⅳ

アーー　イー3　ウー2　エー5　オーー

カー4　キー2　クー5　ケー4　コー2

サー5　シー4　スー2　セー5　ソーー

ター3　チー4　ツー⑨

［Ⅰ］(a)

取り出した 2 枚のカードの数字を x， y とおき、x と y の和を S とおくと S の値は下表のようになる。

y \ x	1	2	3	4	5	6	7	8
1		3	4	5	6	7	8	9
2			5	6	7	8	9	10
3				7	8	9	10	11
4					9	10	11	12
5						11	12	13
6							13	14
7								15
8								

表より、全事象は ${}_8C_2=28$ 通りで上表の各マス目の事象は同様に確からしい。

$S=9$ となる場合が最も出やすく、この確率は $\dfrac{4}{28}=\dfrac{1}{7}$

また、$\left|x^2-y^2\right|=(5\text{の倍数})$ となるのは $\left|(x+y)(x-y)\right|=(5\text{の倍数})$ より

$$\left.\begin{array}{l}\text{（ア）}x+y\text{が「5」となる2通り}\\ \qquad\qquad\text{「10」となる3通り}\\ \qquad\qquad\text{「15」となる1通り}\end{array}\right\}\text{の6通り}$$

または（イ）$\left|x-y\right|$ が「5」となる3通り（表の○印）があり、（ア）と（イ）は排反なので、求める確率は

$$\frac{6+3}{28}=\frac{9}{28}$$

(b) $P_1\cdots$1回の操作で4の倍数がでる確率は

$$\left.\begin{array}{l}S=4\text{が1回}\\ S=8\text{が3回}\\ S=12\text{が2回}\end{array}\right\}\text{より}\quad\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$$

次に

1回目　　2回目

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{\frac{11}{14}} & \\ & & P_2 \\ 1-P_1 & \xrightarrow[\frac{3}{14}]{} & \end{array}$$

より

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{11}{14}P_1 + \frac{3}{14}\left(1-P_1\right) \\ &= \frac{4}{7}P_1 + \frac{3}{14} \\ &= \frac{33}{98} \end{aligned}$$

次に

n回目　　$n+1$回目

$$\begin{array}{ccc} P_n & \xrightarrow{\frac{11}{14}} & \\ & & P_{n+1} \\ 1-P_n & \xrightarrow[\frac{3}{14}]{} & \end{array}$$

より

$$P_{n+1} = \frac{11}{14}P_n + \frac{3}{14}\left(1-P_n\right)$$

$$P_{n+1} = \frac{4}{7}P_n + \frac{3}{14}$$

$$P_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{4}{7}\left(P_n - \frac{1}{2}\right)$$

$$P_n - \frac{1}{2} = \left(P_1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}$$

$$\therefore P_n = \frac{1}{2} - \frac{2}{7}\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}$$

よって、$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2}$

［Ⅱ］

(a) A（1，2）を通り、傾きkの直線は

$$y=k(x-1)+2$$

これがFに接するとき

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\left\{k(x-1)+2\right\}^2=1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+2\left\{kx+(2-k)\right\}^2-6=0$$

$$\Leftrightarrow (2k^2+3)x^2+4k(2-k)x+2(2-k)^2-6=0 \quad ・・・（＊）$$

が重解をもつ

（＊）の判別式をD_1とすると

$$\frac{D_1}{4}=0$$

$$\therefore \left\{2k(2-k)\right\}^2-(2k^2+3)\left\{2(2-k)^2-6\right\}=0$$

$$\Leftrightarrow 6k^2+24k-6=0$$

$$\Leftrightarrow k^2+4k-1=0 \quad ・・・①$$

が成り立つ。

したがって、①の実数解をk_1，k_2とおくと

解と係数の関係から　$k_1k_2=-1$を得るので

2接線は互いに直交するとわかる

よって、2接線のなす角は$\frac{\pi}{2}$である

ここで、$k_2<0<k_1$として

$k_1=\tan\theta_1$，$k_2=\tan\theta_2$とおくと

$\theta_1<\frac{\pi}{2}<\theta_2$となる。

したがって$\alpha=\frac{\pi}{4}+\theta_1$と表せて

$$2\alpha=\frac{\pi}{2}+2\theta_1$$

$$\therefore \tan 2\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}+2\theta_1\right)$$

$$=-\frac{1}{\tan 2\theta_1}$$

$$=-\frac{1-\tan^2\theta_1}{2\tan\theta_1}=-\frac{1-k_1{}^2}{2k_1}$$

$$\tan 2\alpha=-\frac{4k_1}{2k_1}=-2$$

(b) P（X，Y）とし接線の傾きを k とおくと接線は

$$y=k(x-\mathrm{X})+\mathrm{Y}$$

と表せる。これと $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$ から y を消すと

$$3x^2+2\{k(x-\mathrm{X})+\mathrm{Y}\}^2=6$$

$$\Leftrightarrow (2k^2+3)x^2+4k(\mathrm{Y}-k\mathrm{X})x+2(\mathrm{Y}-k\mathrm{X})^2-6=0 \quad \cdots（*）（*）$$

これが重解をもつので（*）（*）の判別式を D_2 とおくと

$$\frac{\mathrm{D}_2}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \{2k(\mathrm{Y}-k\mathrm{X})\}^2-(2k^2+3)\{2(\mathrm{Y}-k\mathrm{X})^2-6\}=0$$

$$\Leftrightarrow (2-\mathrm{X}^2)k^2+2\mathrm{XY}k+3-\mathrm{Y}^2=0 \quad \cdots ②$$

が成り立つ。

ここで、$\angle\mathrm{QPR}$ の二等分線の傾きが 1 なので

$\frac{\pi}{4}-\theta_1=\theta_2-\frac{\pi}{4}$ をみたす。

$$\therefore \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta_1\right)=\tan\left(\theta_2-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \frac{1-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_1}=\frac{\tan\theta_2-1}{1+\tan\theta_2} \quad \cdots ③$$

したがって②の 2 解を（(a) の①と同様の条件とする）

$k_1=\tan\theta_1$，$k_2=\tan\theta_2$ とすると③より

$$\left(1-k_1\right)\left(1+k_2\right)=\left(1+k_1\right)\left(k_2-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad k_1k_2=1$$

をみたす。

また③について解と係数の関係から $k_1k_2=\dfrac{3-y^2}{2-x^2}$

$$\frac{3-y^2}{2-x^2}=1 \qquad \therefore 2-x^2=3-y^2$$

$$\Leftrightarrow -x^2+y^2=1$$

つまり、P は双曲線 $-x^2+y^2=1$ 上にある。

［Ⅲ］

(a)

$$\begin{tikzcd}
 & y=\log_2 x \arrow[dl, "y=x\text{について対称移動}"'] \arrow[dr, "x\text{軸について対称移動}"] & \\
y=2^x \arrow[dr, "y\text{軸について対称移動}"'] & & -y=\log_2 x \arrow[dl, "y=x\text{について対称移動}"] \\
 & y=2^{-x} \arrow[d, "x\text{軸方向に}\frac{1}{2}\text{倍縮小}"] & \\
 & y=2^{-\frac{x}{\frac{1}{2}}} &
\end{tikzcd}$$

$$=2^{-2x}$$

これよりア：①　⑤　　イ：④

(b)　$y=f\left(g(x)\right)=2^{-2\left\{\log_4\left(\frac{1}{a-x}\right)-\log_4(x-2a+6)\right\}}$

※指数部分のみまとめると

$$-2\log_4\left(\frac{1}{a-x}\right)+2\log_4\left(x-2a+6\right)$$

$$=-\log_2\left(\frac{1}{a-x}\right)+\log_2\left(x-2a+6\right)$$

$$= \log_2(a-x) + \log_2(x-2a+6)$$

$$= \log_2(a-x)(x-2a+6)$$

これより

$$y = 2^{\log_2(a-x)(x-2a+6)}$$

$$= (a-x)(x-2a+6)$$

$$y = -2a^2 + (3x+6)a + (-x^2 - 6x)$$

$$= -2\left(a - \frac{3x+6}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$$

$0 < a < 6$ より

$$h(0) = -x^2 - 6x < 0 \quad (\because x > 0)$$

$$h(6) = -x^2 + 12x - 36$$

$$= -(x-6)^2 \leqq 0$$

$y \geqq 0$ より

$$0 \leqq y = h(a) \leqq \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$$

$y = f(g(n))$ のグラフが通過する領域は

$$\mathrm{D}: \mathrm{y} \leqq \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \qquad x \geqq 0,\ \ y \geqq 0$$

その面積は

$$\int_0^6 \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}\right) dx = \left[\frac{1}{24}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x\right]_0^6 = 9$$

(c) $\begin{cases} g(x) = \log_{\frac{1}{4}}(a-x)(x-2a+6) \cdot\cdot\cdot ア \\ y \quad = \log_{\frac{1}{4}} \cdot \dfrac{5-x}{2} \cdot\cdot\cdot イ \end{cases}$

真数条件より

$a-x>0$ ・・・①, $x-2a+6>0$ ・・・②, $5-x>0$ （かつ$0<a<6$）・・・③

$g(x)=h(x)$より

$$-\log_4(a-x)(x-2a+6) = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{5-x}{2}\right)$$

$$= -\log_2\left(\frac{5-x}{2}\right)$$

$(a-x)(x-2a+6) = \dfrac{5-x}{2}$ ・・・④

$\therefore \quad 2x^2 + (11-6a)x + 4a^2 - 12a + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \{2x-(2a-1)\}\{x-(2a-5)\} = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2a-1}{2},\ 2a-5$

$\therefore x = a - \dfrac{1}{2},\ 2a-5$ ・・・⑤

③かつ④のとき $(a-x)(x-2a+6)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-x>0 \text{かつ} x-2a+6>0 \\ \text{又は} \\ a-x<0 \text{かつ} x-2a+6<0 \end{cases}$

ここで $(2a-6)-a = a-6 < 0$ （$\because \quad 0<a<6$）

$\therefore \quad 2a-6<a$

したがって $2a-6<x<a$ $\quad\therefore \quad a-x>0$ かつ $2a-6<x$

以上より $x>0$ のもとで

①かつ②かつ③かつ④ $\Leftrightarrow$ ③かつ④

$\therefore \quad 0<x<5$ かつ ⑤ ・・・（＊）

ｉ）　$a-\frac{1}{2}<2a-5$　すなわち　$a>\frac{9}{2}$のとき

$0<a-\frac{1}{2}<2a-5<5$

$\therefore\ \ a>\frac{1}{2},\ \ a>\frac{9}{2},\ \ a<5$　　　$\therefore\ \ \frac{9}{2}<a<5$

ⅱ）　$a-\frac{1}{2}>2a-5$すなわち$a<\frac{9}{2}$のとき

$0<2a-5<a-\frac{1}{2}<5$

$\therefore\ \ \frac{5}{2}<a<\frac{9}{2},\ \ a<\frac{11}{2}$　　　$\therefore\ \ \frac{5}{2}<a<\frac{9}{2}$

ｉ），ⅱ）より

$\frac{5}{2}<a<\frac{9}{2},\ \ \frac{9}{2}<a<5$

［Ⅳ］

（a）$\int_0^x e^{-3t}\sin 4t\,dt=e^{-3x}\left(A\sin 4x+B\cos 4x\right)+C$　…①　の両辺をxで微分すると、

$$e^{-3x}\sin 4x=\left(-3A-4B\right)e^{-3x}\sin 4x+\left(4A-3B\right)e^{-3x}\cos 4x \quad \cdots ②$$

②がxについて恒等的に成立するとき、$-3A-4B=1,\ \ 4A-3B=0$

$\therefore\ \ A=\frac{-3}{25},\ \ B=\frac{-4}{25}$・・・(ア～ク)。

また、①の両辺に$x=0$を代入すると、

0＝1×（0×A＋B）＋C　∴　$C=B=\frac{4}{25}$

さらに、①の両辺について、$x\to\infty$の極限をとると、

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-3x}\sin 4t\,dt=\lim_{x\to\infty}\left\{e^{-3x}\left(A\sin 4x+Bcox4x\right)+C\right\}=C=\frac{4}{25}$$ ・・・(シスセ)。

(b) $I_n=\int_{\frac{n-1}{4}\pi}^{\frac{n}{4}\pi}e^{-3t}\left|\sin 4t\right|dt$ に対して、$t=u+\dfrac{n-1}{4}\pi$ と置換する。

このとき、$dt=du$ 、

t	$\dfrac{n-1}{4}\pi \quad \to \quad \dfrac{n}{4}\pi$
u	$0 \quad \to \quad \dfrac{1}{4}\pi$

ここから

$\left|\sin 4t\right|=\left|\sin\left\{4u+(n-1)\pi\right\}\right|=\sin 4u$ （$\because 0\leqq 4u\leqq\pi$ より $\sin 4u\geqq 0$）なので、

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-3u-\frac{3}{4}(n-1)\pi}\cdot\sin 4udu=e^{-\frac{3}{4}(n-1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-3u}\sin 4udu$$

となる。これより、$\dfrac{I_{n+1}}{I_n}=\dfrac{e^{-\frac{3}{4}u\pi}}{e^{-\frac{3}{4}(n-1)\pi}}=e^{-\frac{3}{4}\pi}I_n$ となり、

数列$\}I_n\}$は、公比 $e^{-\frac{3}{4}\pi}$ の等比数列となる。ゆえに、$\alpha=\dfrac{-3}{4}\pi$ ・・・(ソタチ)。

また、(a) の結果を用いて、(ただし、積分定数 C は省略)

$$I_n=e^{-\frac{3}{4}(n-1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-3u}\sin 4udu$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}(n-1)\pi}\left[e^{-3u}\left(-\frac{3}{25}\sin 4u-\frac{4}{25}\cos 4u\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=e^{-\frac{3}{4}(n-1)\pi}\cdot\frac{4}{25}\left(e^{-\frac{3}{4}}+1\right)$$

$$=C\left(1+e^{\alpha}\right)e^{\alpha(n-1)}$$

したがって、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}I_n=\sum_{n=1}^{\infty}C\left(1+e^{\alpha}\right)e^{(n-1)\alpha}=\mathrm{C}\times\frac{1+e^{\alpha}}{1-e^{\alpha}}$ より、ツ＝⑨