進学塾ビッグバン
BIG BANG

解答速報　数学

2019 年度　大阪医科大学(前期)　一般入学試験

1

(1) $ab=21$ のとき　$a,b,c>0$ をみたす整数であるので、

(a,b)の組み合わせは　$(1,21)(3,7)(7,3)(21,1)$の 4 通りであり

また　、余弦定理を用いて

$a^2=b^2+c^2-bc$ ・・・①

①に代入して計算すると、

（i）$(a,b)=(1,21)$のとき

①より　$c^2-21c+440=0$ から判別式　$D<0$ より不適

（ii）$(a,b)=(3,7)$のとき

①より　$c^2-7c-40=0$　より　$c=\dfrac{7\pm\sqrt{218}}{2}$ より不適

(iii)　$(a,b)=(7,3)$のとき

①より　$c^2-3c-40=0$　より　$c=8$ より適する

(iv)　$(a,b)=(21,1)$のとき

①より　$c^2-c-440=0$ より　因数分解できないので不適

（i）～(iv)より　$(a,b,c)=(7,3,8)$　のみである。

(2)　$a+b+c=\dfrac{bc}{2}$　のときの　(a,b,c)　を求める

ここで、$a=\dfrac{bc}{2}-b-c$　として　両辺二乗すると

$a^2=\dfrac{b^2c^2}{4}-b^2c-bc^2+(a+b)^2$　となり　これに　①を代入して整理すると

$b^2c^2-4b^2c-4bc^2+12bc=0$　より　$(b-4)(c-4)=4$ となり

ここから　$(b,c)=(5,8)(6,6)(8,5)$　となり

∴　$(a,b,c)=(7,5,8)(6,6,6)(7,8,5)$　の 3 つである。

2

(1)　$t \geqq 0$のとき、$\dfrac{t^2}{2}<e^t$を示す。　　$f(t)=e^t-\dfrac{t^2}{2}$とおくと

$f'(t)=e^t-t$　　　$f''(t)=e^t-1\geqq 0$　$(\because t\geqq 0$で、$e^t\geqq 1)$

すなわち、$y=f'(t)$は単調増加。　　$f'(0)=1$で$f'(t)$：増加より、$f'(t)>0$

同様に、$y=f(t)$は単調増加。　　$f(0)=1$で$f(t)$：増加より、$f(t)>0$

$f(t)>0 \Leftrightarrow \dfrac{t^2}{2}<e^t$

(2)　$y'=\{2x-2x(x^2-1)\}e^{-x^2}=-2x(x^2-2)e^{-x^2}$

yの増減表

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	∞
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e^2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e^2}$	$\searrow$	0

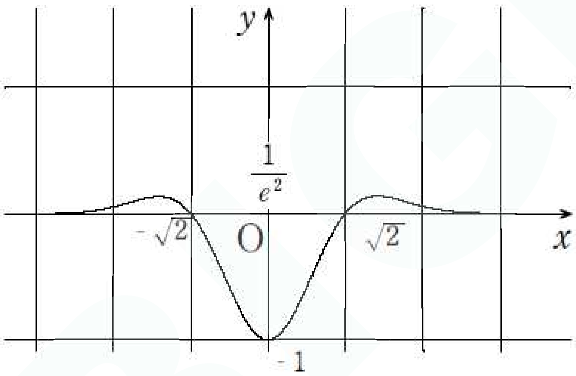
$|x|$が十分大きいとき

$0<(x^2-1)e^{-x^2}<(2e^x-1)e^{-x^2}$　$(\because(1))$

すなわち　$0<(x^2-1)e^{-x^2}<(2e^{-x}-e^{-x^2})$

はさみうちの原理より、$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(x^2-1)e^{-x^2}=0$である。

yのグラフの概形は以下のようになる。



上のグラフと$y=c$の共有点の個数は

c	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{e^2}$	$\cdots$
共有点の個数	0	1	2	2	4	2	0

3

条件整理

$$X_i=\begin{cases} Z_i & (Z_i\geqq 4) & \cdots ① \\ Z_i+Z'_i & (Z_i\leqq 3,\ Z_i+Z'_i\leqq 6) & \cdots ② \\ 6 & (Z_i\leqq 3,\ Z_i+Z'_i>6) & \cdots ③ \end{cases}$$ とする。

(1)

(ⅰ)①を満たすものは　$Z_1=4,5,6$　の３通りであり。　このとき　Z'_1　は

どの目でもよいので各々の確率は　$\frac{1}{6}$　である。

(ⅱ)②を満たす$(Z_1,\ Z'_1)$の組み合わせは、

$(Z_1,Z'_1)=(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(3,1)(3,2)(3,3)$

であり、$Z_1+Z'_1=2,3,4,5,6$　である　また各々の確率は　左から順に

$\frac{1}{36},\frac{1}{18},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12}$　である。

(ⅲ)③をみたすものは　$(Z_1,Z'_1)=(1,6)(2,5)(2,6)(3,4)(3,5)(3,6)$　となり

この時の確率は　$\frac{1}{6}$　より　　(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)から

∴　$X_1=2,3,4,5,6$　をとり　　そのときの確率を P_2,P_3,P_4,P_5,P_6とすると

$$P_2=\frac{1}{36},\ P_3=\frac{1}{18},\ P_4=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}\ ,P_5=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}\ ,P_6=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$

(2)　$Z_1=1$のとき　$X_1+X_2=6$なる組み合わせは　$(X_1,X_2)=(2,4)(3,3)(4,2)$のときである

そのときの確率は　$P\ (Z_1=1かつ\ X_1+X_2=6)=\frac{1}{36}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{36}\times\frac{1}{18}+\frac{1}{36}\times\frac{1}{36}\ =\frac{1}{108}$

よって条件付き確率は　$P_{Z_1=1}(X_1+X_2=6)=\dfrac{\frac{1}{108}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{18}$ となる

(３) $X_1+X_2=6$なる組み合わせは　$(X_1,X_2)=(2,4)(3,3)(4,2)$のときである

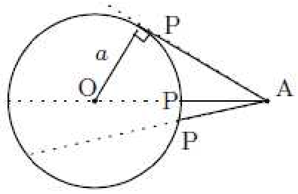
このときの確率は　$P(X_1+X_2=6)=\frac{1}{36}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\times\frac{1}{18}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{36}=\frac{22}{36\times 36}$　となり

また　　$X_1+X_2=6$かつ$Z_1=1$となる確率は（２）より$P\ (Z_1=1かつ\ X_1+X_2=6)=\frac{12}{36\times 36}$

∴　　条件付き確率は　$P_{(X_1+X_2=6)}(Z_1=1)=\dfrac{\frac{12}{36\times 36}}{\frac{22}{36\times 36}}=\frac{6}{11}$　となる

4

(1) A は C の外側にあり，線分 AP と C の共有点が P のみのとき，

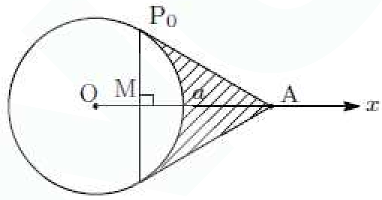


直線 AP は C と共有点をもち，そのうち A に近い方の共有点を P とすればよい。よって

AP が最小となるのは，直線 AP が O を通るときで，$\mathrm{AP}=1-a$

AP が最大となるのは，AP が C と接するときで，$\mathrm{AP}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OP}^2}=\sqrt{1-a^2}$

(2) K は A から S に引いた接線の A から接点までの線分の集合のうち，S の外側にある部分である。



右図のように A(1, 0, 0) とし，A から S への接線を引いたときの接点を P_0 し，P_0 が動いてできる円の中心を M とすると，
$\triangle\ \mathrm{OP_0M} \backsim \triangle\ \mathrm{OAP_0}$ であるから，

$$\mathrm{OM}:\mathrm{OP_0}=\mathrm{OP_0}:\mathrm{OA} \Leftrightarrow \mathrm{OM}:a=a:1 \qquad \therefore\ \mathrm{OM}=a^2$$

よって，$\mathrm{M}(a^2,\ 0,\ 0)$ であり，$\mathrm{MP_0}=\sqrt{a^2-a^4}=a\sqrt{1-a^2}$

また，$x^2+y^2+z^2=a^2$ の $x=t\ \ (-a \leqq t \leqq a)$ で切断した断面は，$y^2+z^2=a^2-t^2$ より，

$$\text{断面積 } S(t)=(\sqrt{a^2-t^2})^2\pi=(a^2-x^2)\pi$$

よって，求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= (\text{底面半径 } \mathrm{MP_0},\ \text{高さ AM の円すい}) - (x^2+y^2+z^2 \leqq a^2 \text{ の } a^2 \leqq x \leqq a \text{ の部分})\\
&= (a\sqrt{1-a^2})^2\pi\cdot(1-a^2)\cdot\frac{1}{3}-\int_{a^2}^{a} S(x)\,dx\\
&= \frac{a^2(1-a^2)^2\pi}{3}-\int_{a^2}^{a}(a^2-x^2)\pi\,dx\\
&= \frac{a^2-2a^3+a^4}{3}\pi-\pi\left[\,a^2x-\frac{x^3}{3}\,\right]_{a^2}^{a}\\
&= \frac{a^2-2a^4+a^6}{3}\pi-a^2(a-a^2)\pi+\frac{a^3-a^6}{3}\pi\\
&= \frac{a^2-2a^3+a^4}{3}\pi\\
&= \boldsymbol{\frac{a^2(1-a)^2\pi}{3}}
\end{aligned}$$

5

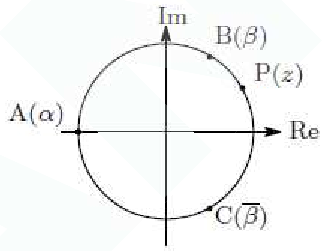
(1) $w_k = \cos\theta_k + i\sin\theta_k \quad (k=1,\ 2)$ とすると

$$\begin{aligned}
|w_1 - w_2| &= |(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) + i(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)| \\
&= \left|-2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2} + i\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right| \\
&= \left|2\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right|\cdot\left|-\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right|
\end{aligned}$$

ここで，$\left|-\sin\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2} + i\cos\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right| = 1$ かつ $\theta = \arg\dfrac{w_1}{w_2} = \theta_1 - \theta_2$ より，

$$|w_1 - w_2| = \left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|$$ であることが示された。

(2) $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\overline{\beta})$, $\mathrm{P}(z)$ とする。



$|z-\alpha| + |z-\beta| + |z-\overline{\beta}| = \mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{CP}$ であり，

$\arg\alpha = \pi$, $\arg\beta = \dfrac{\pi}{3}$, $\arg\beta = -\dfrac{\pi}{3}$ と，A, B, C は

単位円を 3 等分する点であるから，$z = \cos\theta + i\sin\theta$

に対して，$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ として，一般性を失わない。

(1) より，$f(\theta) = |z-\alpha| + |z-\beta| + |z-\overline{\beta}|$ とおくと，

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \left|2\sin\frac{\theta-\pi}{2}\right| + \left|2\sin\frac{\theta-\frac{\pi}{3}}{2}\right| + \left|2\sin\frac{\theta+\frac{\pi}{3}}{2}\right| \\
&= 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| + 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right)\right| + \left|2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\theta}{2}\right)\right| \\
&= 2\cos\frac{\theta}{2} + 2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\theta}{2}\right) \\
&= 2\cos\frac{\theta}{2} + 4\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\theta}{2} \\
&= 4\cos\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

いま，$-\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{\theta}{2} \leqq \dfrac{\pi}{6}$ より，$f(\theta)$ の

最大値は $f(0) = \mathbf{4}$，最小値は $f\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right) = \mathbf{2\sqrt{3}}$

【 講 評 】

例年通り、大問数５題で、すべて記述式となっている。第１問～３問は解き易かったが第４問(2)、第５問(2)は難しく、できるところを確実に得点し、70％の正答率を目指したい。

１．整数	難易度：標準
(1)は(a,b) の値で場合分けして考えるとよい。 (2)は余弦定理より文字を消去し積の形へ変形し解くことができる。	
２．微分法	難易度：標準
(1)は易しいがその結果を(2)のはさみうちの定理に利用する。 (2)は関数を描き、定数分離より求めることができる。	
３．確率	難易度：標準
定義の把握に試験場では難しく感じたかも知れない。 その把握さえできれば、漏れがないように正確に行いたい。	
４．空間図形	難易度：やや難
(1)は易しい。(2)では空間図形の概形をとらえ、 球の切断円の積分を正確に行いたい。	
５．複素数平面	難易度：やや難
(1)は和積変換を用いて変形すると変形が煩雑にならず解ける。 (2)はα,β,γが円周を三等分している事に気づき z の動く範囲を限定すると解きやすい。	