解答速報 数学

2017年度 近畿大学 推薦入学試験

進学塾ビッグバン

$\boxed{1}$

素数さいころの目は2, 3, 5, 7, 11, 13であり,
合成数さいころの目は4, 6, 8, 9, 10, 12である。

(1) 素数さいころ2回の目の和は4以上のため，和が素数となるとき，その和は奇数である。よって，$2+3=5$，$2+5=7$，$2+11=13$ の3パターンがあり，1回目，2回目の目の入れ替えも考えて，$2\times3=6$ 通りで，その確率は $\dfrac{6}{6\times6}=\boxed{\dfrac{1}{6}}$ ………（ア）

素数さいころと合成数さいころの組み合わせで互いに素な組み合わせは
(2, 9)(3, 4)(3, 8)(3, 10)(5, 4)(5, 6)(5, 8)(5, 9)(5, 12)
の9パターン。また，7, 11, 13のそれぞれ3個の目と，6, 8, 9, 10, 12の6個それぞれの目はすべて互いに素であるから，$\dfrac{9+3\times6}{6\times6}=\boxed{\dfrac{3}{4}}$ ………（イ）

素数さいころと合成数さいころの目の和の最小値は6，最大値は25のため，その間にある素数の作り方を数えると

和＝7：3+4　　和＝17：5+12, 7+10, 11+6, 13+4
和＝11：2+9, 3+8, 5+6, 7+4　　和＝13：3+10, 5+8, 7+6
和＝19：7+12, 11+8, 13+6　　和＝23：11+12, 13+10

の17パターンなので，その確率は $\dfrac{17}{6\times6}=\boxed{\dfrac{17}{36}}$ ………（ウ）

(2) 合成数さいころの目のうち，素数2個の積で作られるものは，
$4=2\times2$，$6=2\times3$，$9=3\times3$，$10=2\times5$ の4パターン。素数さいころの2回の目の入れ替えを考慮して，$\dfrac{1+2+1+2}{6\times6\times6}=\boxed{\dfrac{1}{36}}$ ………（エ）

(3) $x^2-ax+b=0$ の判別式 $D=a^2-4b$ を，2つのさいころの目の36通りの組み合わせについて調べると，右図のようになる。よって，C が x 軸と共有点をもつのは，$D\geqq0$ を満たす20パターンで，その確率は $\dfrac{20}{6\times6}=\boxed{\dfrac{5}{9}}$ ………（オ）

$a\diagdown b$	4	6	8	9	10	12
2	−12	−20	−24	−32	−36	−44
3	−7	−15	−19	−27	−31	−39
5	9	1	−3	−11	−15	−23
7	33	25	17	13	9	1
11	105	97	89	85	81	73
13	153	145	137	133	129	121

($D=a^2-4b$ の値)

また，$x^2-ax+b=0$ の2解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，

$\alpha=\dfrac{a-\sqrt{D}}{2}$，$\beta=\dfrac{a+\sqrt{D}}{2}$ であり，C と x 軸で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}-(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\sqrt{D})^3$$

であり，$D\geqq 0$ であるものの中で，D の最大値・最小値は

$(a,\ b)=(13,\ 4)$ のときの $D=153\ (=3^2\cdot 17)$

$(a,\ b)=(5,\ 6)(7,\ 12)$ のときの $D=1$

よって，

S の最大値は $\dfrac{1}{6}(\sqrt{153})^3=\boxed{\dfrac{153\sqrt{17}}{2}}$ ……… (カ)

S の最小値は $\dfrac{1}{6}(\sqrt{1})^3=\boxed{\dfrac{1}{6}}$ ……… (キ)

$\boxed{2}$

(1) $r_n\equiv a_n\ (\mathrm{mod}\ 4)$ と表せるので，$r_{n+2}\equiv r_{n+1}+r_n\ (\mathrm{mod}\ 4)$ である。

$r_1=1$，$r_2=1$，$r_3\equiv 1+1=2$，$r_4\equiv 2+1=3$，$r_5\equiv 3+2\equiv 1$，$r_6\equiv 1+3\equiv 0$，

$r_7=0+1=1\ (\mathrm{mod}\ 4)$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{7}r_k=1+1+2+3+1+0+1=\boxed{9}$

(2) $r_8\equiv 1+0=1$ であるから，$\{r_n\}$ は 1, 1, 2, 3, 1, 0 を周期 6 で循環する。

いま，$2017=6\times 336+1$ であるから，$r_{2017}=r_1=\boxed{1}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2017}a_k=\sum_{k=1}^{2017}r_k=336(1+1+2+3+1+0)+1\equiv\boxed{1}\ (\mathrm{mod}\ 4)$

(4) $a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$ の特性方程式 $x^2-x-1=0$ の解は $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ より，

$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと，$a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$ を変形すると

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n),\quad a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$$

となる。等比数列の一般項より，

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$$

$$=\beta^{n-1}\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\qquad\therefore\ a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^n\ \cdots\cdots ①$$

$$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)$$

$$=\alpha^{n-1}\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\qquad\therefore\ a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^n\ \cdots\cdots ②$$

である。①−② より，

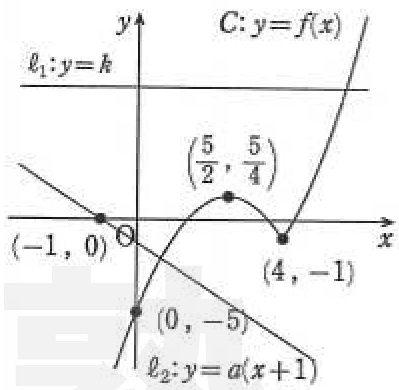
$$(\beta-\alpha)a_n=\beta^n-\alpha^n$$

$$\therefore\ a_n=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}}$$

進学塾ビッグバン

3

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2-5x+3 & (x \geqq 4 \text{ のとき}) \\ -x^2+5x-5 & (x \leqq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$ である。



$x^2-5x+3=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$,

$-x^2+5x-5=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$ より，$x \leqq 4$ に頂点

$\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{4}\right)$ がある。

$C: y=f(x)$ と $\ell_1: y=k$ のグラフの交点が3個となる

ような k の値の範囲は $\boxed{-1<k<\frac{5}{4}}$

(2) $\ell_2: y=a(x+1)$ は，$(-1,\ 0)$ を必ず通るため，C と ℓ_2 が異なる3交点をもつとき，
$x<4$ の範囲で2つの交点をもち，$x>4$ の範囲で1つの交点をもてばよい。

ℓ_2 が $(4,\ -1)$ を通るとき，$-1=a(4+1)$ $\qquad \therefore\ a=-\frac{1}{5}$

$x>4$ でC，ℓ_2 が交点をもつのは，$a>-\frac{1}{5}$ ………①

また，$a>-\frac{1}{5}$ のとき，C，ℓ_2 の交点は，必ず $x<4$ の範囲にあるので，

$$a(x+1)=-x^2+5x-5 \qquad x^2+(a-5)x+a+5=0 \quad \text{………②}$$

が異なる2解をもてば，C，ℓ_2 は $x<4$ に2交点をもつ。

$$D=(a-5)^2-4(a+5)>0$$

$$a^2-14a+5>0 \qquad \therefore\ a<7-2\sqrt{11},\ 7+2\sqrt{11}<a \quad \text{………③}$$

①かつ②より $\boxed{-\frac{1}{5}<a<7-2\sqrt{11},\ 7+2\sqrt{11}<a}$

(3) P，Qは $x<4$ の範囲にあり，Rは $x>4$ の範囲にあるため，P，Qの x 座標をそれぞれ p，$2p$ とおくと，これらは②の解であり，$p>0$ である。解と係数の関係より，

$$p+2p=-(a-5) \qquad \therefore\ p=\frac{5-a}{3} \quad \text{………④}$$

$$p\cdot(2p)=a+5 \qquad \therefore\ 2p^2=a+5 \quad \text{………⑤}$$

④かつ $p>0$ より，$a<5$ ………⑥

④，⑤より，$2\left(\frac{5-a}{3}\right)^2=a+5$

$$2a^2-29a+5=0 \qquad \therefore\ a=\frac{29\pm3\sqrt{89}}{4}$$

⑥より，$\boxed{a=\frac{29-3\sqrt{89}}{4}}$

進学塾ビッグバン
進学塾ビッグバン

進学塾ビッグバン
BIG BANG

解答速報 数学

2017 年度　近畿大学　推薦入学試験

【 講 評 】

大問 3 問で、どの問題も(1)(2)あたりは典型的な問題であり、多くは落とせない。時間が 60 分と短めであることと、やや計算が大変な問題が含まれているため、やや発展的な各大問の後半のうち、時間内に解けそうなものを選択して、解き切れるかが合否のカギになると思われる。7 割以上を目指したい。

1. 確率	難易度： やや難
目の数が特殊な 2 種類のさいころに関する確率。条件を満たす目の出方を地道に数えるだけであるが易しくはない。(3)では、$x^2-ax+b=0$ の判別式の値が、$y=x^2-ax+b$ と x 軸とで囲まれた面積に活かせることを、日々の学習から学び取れているかがポイントであった。	
2. 隣接三項間漸化式	難易度： 標準
フィボナッチ数列と呼ばれる隣接三項間漸化式に関する問題。(1)～(3)は、数列の各項の 4 での剰余を扱う問題で、数列と剰余によくある周期性に注目するとよい。(4)は、数列の一般項を求める問題で、やや計算は大変だが特性方程式を用いて解く問題で典型的。(3)までと(4)とは独立した問題であるが、どちらも標準的。	
3. 2 次関数と直線	難易度： 標準
2 次関数と直線との交点の個数と、交点の x 座標に関する問題。グラフの形状から方程式の解がどのようになるか見ればよく、典型的な問題である。(3)は、問題の条件を a の条件式でどう表すかがポイントの問題。標準的である。	