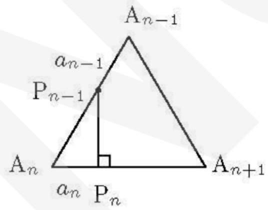
解答速報 数学

2020 年度 大阪医科大学(前期) 一般入学試験

$\boxed{1}$

(1) $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{A}_n = 1 - a_{n-1}$ である。

直角三角形 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n\mathrm{A}_n$ について，$\angle \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n = \dfrac{\pi}{3}$ より，



$$\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{A}_n : \mathrm{A}_n\mathrm{P}_n = 2 : 1$$

$$(1 - a_{n-1}) : a_n = 2 : 1$$

$$2a_n = 1 - a_{n-1}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}}$$

(2) $a_n - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} - \dfrac{1}{3}\right)$ であるから，等比数列の一般項より，

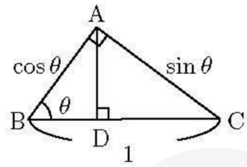
$$a_n - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(a_0 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore\ a_n = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(a_n - \frac{1}{3}\right)$$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$

$\boxed{2}$

(1) $\mathrm{AB}=\cos\theta,\ \mathrm{AC}=\sin\theta$ である。



点 A から辺 BC に引いた垂線と辺 BC の交点を D とする。

$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{DBA}\backsim\triangle\mathrm{DAC}$ より，

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}}=\cos\theta,\ \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}}=\sin\theta$$

$$\therefore\ \mathrm{AD}=\sin\theta\cos\theta,\ \mathrm{BD}=\cos^2\theta,\ \mathrm{CD}=\sin^2\theta$$

V は，線分 AD を底面の半径とする 2 つの円すいの体積の和であるから，

$$\begin{aligned} V&=\pi\mathrm{AD}^2\cdot(\mathrm{BD}+\mathrm{CD})\cdot\frac{1}{3}\\ &=\frac{\pi}{3}\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\\ &=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}\sin^2\theta\cos^2\theta} \end{aligned}$$

(2) $l=\mathrm{AB}+\mathrm{AC}+\mathrm{BC}=\sin\theta+\cos\theta+1$ であり，$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$ である。

よって，

$$\begin{aligned} \frac{V}{Sl}&=\frac{\frac{\pi}{3}\sin^2\theta\cos^2\theta}{\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta+1)}\\ &=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta+1} \end{aligned}$$

ここで，θ の値の範囲は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であり，$x=\sin\theta+\cos\theta$ とおく。いま，

$$x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\qquad\left(\text{ただし，}\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}\right)$$

であるから，$1<x\leqq\sqrt{2}$ である。特に，$x=\sqrt{2}$ となるのは

$$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\qquad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$$

のときである。また，

$$x^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\qquad\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\frac{x^2-1}{2}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \frac{V}{Sl}&=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{x^2-1}{2(x+1)}\\ &=\frac{\pi}{3}(x-1) \end{aligned}$$

である。$\frac{V}{Sl}$ は x についての増加関数であるから，$x=\sqrt{2}$ のときに，最大値 $\frac{\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$ をとる。このとき，$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{4}}$

$\boxed{3}$

(1) A となる確率は，2 個の球を同時に取り出すと見て，

$$P(A) = \frac{{}_m\mathrm{C}_1 \cdot {}_m\mathrm{C}_1}{{}_{2m}\mathrm{C}_2} = \frac{m}{1} \cdot \frac{m}{1} \cdot \frac{2}{2m(2m-1)} = \boldsymbol{\frac{m}{2m-1}}$$

B となる確率は，4 個の球を同時に取り出すと見て，

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{{}_m\mathrm{C}_2 \cdot {}_m\mathrm{C}_2}{{}_{2m}\mathrm{C}_4} \\ &= \frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{24}{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)} \\ &= \boldsymbol{\frac{3m(m-1)}{2(2m-1)(2m-3)}} \end{aligned}$$

(2) $A \cap B$ となる確率は，最初に 2 個の球を同時に，続いて 2 個の球を同時に取り出すと見て，

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{{}_m\mathrm{C}_1 \cdot {}_m\mathrm{C}_1}{{}_{2m}\mathrm{C}_2} \cdot \frac{{}_{m-1}\mathrm{C}_1 \cdot {}_{m-1}\mathrm{C}_1}{{}_{2m-2}\mathrm{C}_2} \\ &= \frac{m}{1} \cdot \frac{m}{1} \cdot \frac{2}{2m(2m-1)} \cdot \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-1}{1} \cdot \frac{2}{(2m-2)(2m-3)} \\ &= \boldsymbol{\frac{m(m-1)}{(2m-1)(2m-3)}} \end{aligned}$$

(3) A も B も起こらない確率は $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ である。

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\ &= 1 - \frac{m}{2m-1} - \frac{3m(m-1)}{2(2m-1)(2m-3)} + \frac{m(m-1)}{(2m-1)(2m-3)} \\ &= \frac{m-1}{2m-1} - \frac{m(m-1)}{2(2m-1)(2m-3)} \\ &= \frac{(m-1)\{2(2m-3)-m\}}{2(2m-1)(2m-3)} \\ &= \boldsymbol{\frac{3(m-1)(m-2)}{2(2m-1)(2m-3)}} \end{aligned}$$

$\boxed{4}$

(1) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=p$ とおく。p は有理数である。

$$(\sqrt{b})^2=(p-\sqrt{a})^2$$
$$b=p^2-2p\sqrt{a}+a$$
$$\therefore\ \sqrt{a}=\frac{p^2+a-b}{2p}$$

a，b，p は有理数なので，$\sqrt{a}$ は有理数である。同様にして，$\sqrt{b}$ が有理数であることも示せる。

(2) $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=q$ とおく。q は有理数である。

$$(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2=(q-\sqrt{a})^2$$
$$b+2\sqrt{bc}+c=q^2-2q\sqrt{a}+a$$
$$\therefore\ 2q\sqrt{a}+(b+c-a-q^2)=-2\sqrt{bc}$$

ここで，$b+c-a-q^2=r$ とおくと，a，b，c，q が有理数であることから，r は有理数である。

$$(2q\sqrt{a}+r)^2=(2\sqrt{bc})^2$$
$$4aq^2+4qr\sqrt{a}+r^2=4bc$$
$$\therefore\ \sqrt{a}=\frac{4bc-4aq^2-r^2}{4qr}$$

a，b，c，q，r は有理数なので，$\sqrt{a}$ は有理数である。同様にして，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ が有理数であることも示せる。

$\boxed{\text{別解}}$ $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=q$ とおく。q は正の有理数である。

$$(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2=(q-\sqrt{a})^2$$
$$b+2\sqrt{bc}+c=q^2-2q\sqrt{a}+a$$
$$2q\sqrt{a}+2\sqrt{bc}=q^2+a-b-c$$
$$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{\frac{bc}{q^2}}=\frac{q^2+a-b-c}{2q}$$

$\dfrac{q^2+a-b-c}{2q}$ は有理数であるから，(1) より，$\sqrt{a}$，$\sqrt{\dfrac{bc}{q^2}}$ はともに有理数である。同様にして，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ も有理数であることが示せる。

$\boxed{5}$

(1) 部分積分により，

$$\int_0^x t^n \cos t \, dt = \Big[\, t^n \sin t \,\Big]_0^x - n\int_0^x t^{n-1} \sin t \, dt$$

$$\therefore\ \boldsymbol{c_n(x) = -ns_{n-1}(x) + x^n \sin x} \qquad (\because\ n \geqq 1)$$

$$\int_0^x t^n \sin t \, dt = \Big[-t^n \cos t \Big]_0^x + n\int_0^x t^{n-1} \cos t \, dt$$

$$\therefore\ \boldsymbol{s_n(x) = nc_{n-1}(x) - x^n \cos x} \qquad (\because\ n \geqq 1)$$

(2) 部分積分により，

$$\int_0^x t^n \cos(x-t) \, dt = \Big[-t^n \sin(x-t) \,\Big]_0^x + n\int_0^x t^{n-1} \sin(x-t) \, dt$$

$$= 0 + \Big[\, nt^{n-1} \cos(x-t) \Big]_0^x - n(n-1)\int_0^x t^{n-2} \cos(x-t) \, dt$$

$$\therefore\ \boldsymbol{f_n(x) = nx^{n-1} - n(n-1)f_{n-2}(x)} \qquad (\because\ n \geqq 2)$$

$\boxed{\text{別解}}$ $$f_n(x) = \int_0^x t^n(\cos x \cos t + \sin x \sin t) \, dt = c_n(x) \cos x + s_n(x) \sin x$$

であるから，(1) より，

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \{-ns_{n-1}(x) + x^n \sin x\} \cos x + \{nc_{n-1}(x) - x^n \cos x\} \sin x \\ &= -ns_{n-1}(x) \cos x + nc_{n-1}(x) \sin x \\ &= -n\left\{(n-1)c_{n-2}(x) - x^{n-1} \cos x\right\} \cos x \\ &\qquad\qquad + n\left\{-(n-1)s_{n-2}(x) + x^{n-1} \sin x\right\} \sin x \\ &= nx^{n-1}(\cos^2 x + \sin^2 x) - n(n-1)\left\{c_{n-2}(x) \cos x + s_{n-2}(x) \sin x\right\} \\ &= \boldsymbol{nx^{n-1} - n(n-1)f_{n-2}(x)} \end{aligned}$$

(3) （ $h(t)$ は，x^3 が現れる $f_4(x)$ と剰余項の $f_2(x)$ を用いて，$af_4(x) + bf_2(x) = x^3$ が作れるだろうと予想し，a，b を求めることで導かれるが，$h(t)$ を導く過程は解答に書かなくてもよい。導いた $h(t)$ が問題の条件をみたすことを記述すれば満点である。）

$h(t) = \dfrac{1}{4}t^4 + 3t^2$ とすると，

$$\begin{aligned} \int_0^x h(t) \cos(x-t) \, dt &= \int_0^x \left(\frac{1}{4}t^4 + 3t^2\right) \cos(x-t) \, dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^x t^4 \cos(x-t) \, dt + 3\int_0^x t^2 \cos(x-t) \, dt \\ &= \frac{1}{4}f_4(x) + 3f_2(x) \\ &= \frac{1}{4}\left\{4x^3 - 12f_2(x)\right\} + 3f_2(x) \qquad (\because\ (2)) \\ &= x^3 \end{aligned}$$

と条件をみたす。よって，$\boldsymbol{h(t) = \dfrac{1}{4}t^4 + 3t^2}$

【　講　評　】

例年通り、大問数５題で、すべて記述式となっている。例年に比べて非常に易しく、計算量も少ないため、落とせない問題が多い。７割以上取りたい。

<table>
<tr><td>１．数列</td><td>難易度：易</td></tr>
<tr><td colspan="2">問題文で与えられた状況を図にかけば、漸化式を立てる事も解くこともたやすい。
確実に取りたい問題。</td></tr>
<tr><td>２．図形と計量・三角関数</td><td>難易度：やや易</td></tr>
<tr><td colspan="2">(2)は、三角関数が入った分数関数の最大値であるが、三角関数の典型的なテクニックを用いることで数Ⅲの微分を回避できることに気づけると易しい。</td></tr>
<tr><td>３．確率</td><td>難易度：やや易</td></tr>
<tr><td colspan="2">場合分けも一切なく、誘導も丁寧だったので、満点も取りやすい問題。
(3)で計算間違いをしないようにしたい。</td></tr>
<tr><td>４．数と式</td><td>難易度：やや易</td></tr>
<tr><td colspan="2">(1) は、根号が一つだけになるように計算すれば簡単に示せる。
(2) は、(1)の結果を用いるか、計算方法を応用して示せばよい。難しくはない。</td></tr>
<tr><td>５．積分法</td><td>難易度：標準</td></tr>
<tr><td colspan="2">(1) は、部分積分法で簡単に示せる。
(2) は、(1)の結果を用いても、部分積分法で(1)を無視してもよい。取りたい問題。
(3) は、(2)の結果から、答えになる関数を予想できたかがポイントであった。今年の問題では、唯一、骨のある問題だったかもしれない。</td></tr>
</table>