2021 年度 日本医科大学(前期) 一般入学試験

〔I〕

問1　X, Y, Z が表となった回数はそれぞれ 2, 3, 4 であるから動点 P は定点 A から x 軸方向に -2, y 軸方向に 0, z 軸方向に 2 だけ平行移動したことになる。

よって $(a-2, b, c+2)=(0, 0, 0)$

ゆえに $a=2, b=0, c=-2$

問2　X, Y, Z が表になった回数をそれぞれ a, b, c (a, b, c は0以上5以下の整数) とする。5 回の試行後の点 P は

$(2a-3, 2b-5, 2c-7)$ である。

(1) 点 P のz座標$=-1$ なので, $2c-7=-1 \iff c=3$

また x 軸方向, y 軸方向の平行移動は z 軸方向への平行移動は影響しないので,

求める確率は, Z が表 3 回と裏が 2 回でる確率であるから,

$${}_5C_3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

(2) (1) と同様に考えると, Y, Z のみ考える。

点 P の y 座標が 4 以下なので, $2b-5 \leqq 4 \iff b \leqq \frac{9}{2}$　すなわち Y の表の回数が 4 回以下の時であるから, 5 回全てが表であるときの余事象と考えると,

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{31}{32}$$

また, 点 P の z 座標 $=-1$ となる確率は (1) から $\frac{5}{16}$

また $y \leqq 4$ となるときと $z=-1$ となるときは互いに独立しているから,

$$\frac{31}{32}\cdot\frac{5}{16}=\frac{155}{512}$$

(3) 点 P の x 座標 >2 なので，$2p-3>2 \iff p>\dfrac{5}{2}$ すなわち X の表の回数が 3 回以上のときであるから，

$${}_5C_3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_5C_4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{2}$$

また点 P の y 座標 $+z$ 座標 $=2$ なので，$2b-5+2c-7=2 \iff b+c=7$

b，c は 0 以上 5 以下の整数なので，$(b,c)=(2,5),(3,4),(4,3),(5,2)$

ゆえに求める確率は

$${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1\times{}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{1}{2}\right)^5\times{}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{15}{128}$$

$x>2$ となるときと，$y+z=2$ となるときは互いに独立であるから，求める確率は，$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{15}{128}=\dfrac{15}{256}$

〔II〕

問 1 L : $y=5ax+a^4$ が原点を通るので，$0=a^4 \iff a=0$

問 2 曲線 C を $y=f(x)$ とすると，

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+7x & (x>0)\\ x^2-5x & (x\leqq 0)\end{cases}$$

であり，$x>0$ のとき，$f'(x)=-2x+7$ だから，$x=1$ のとき $f'(1)=5$

したがって求める接線の方程式は $y=5(x-1)+6 \iff y=5x+1$

問 3 曲線 C 上の 点 $P(p, f(p))$ における接線は，

$$y=f'(p)(x-p)+f(p)$$

$p>0$ のとき，$y=(-2p+7)x+p^2$

$p\leqq 0$ のとき，$y=(2p+5)x-p^2$

直線Lの y 切片 >0 なので，曲線 C と直線 L が接するのは $x>0$ のときである。

曲線 C と直線 L が $x>0$ で接するとき

$$\begin{cases} -2p+7=5a \\ p^2=a^4 \end{cases}$$ が成り立つ。

上式を解くと，$2a^2-5a+7=0 \iff a=-\dfrac{7}{2},1$

グラフを書いて調べると，$\begin{cases} a<-\dfrac{7}{2},\ 1<a \text{ のとき } N(a)=1 \\ a=\dfrac{-7}{2},\ 1 \text{ のとき } N(a)=2 \\ -\dfrac{7}{2}<a<0,\ 0<a<1 \text{ のとき } N(a)=3 \end{cases}$

〔Ⅲ〕

問 1 「曲線 C と 2 直線 AF, BF で囲まれる部分」すなわち「曲線 C と線分 AF, BF で囲まれる部分」である。

直線 AF : $y=\dfrac{a}{\dfrac{a^2}{4p}-p}(x-p) \iff x=\left(\dfrac{\dfrac{a^2}{4p}-p}{a}\right)y+p$

直線 BF : $y=\dfrac{b}{\dfrac{b^2}{4p}-p}(x-p) \iff x=\left(\dfrac{\dfrac{b^2}{4p}-p}{b}\right)y+p$

$$\therefore S=\int_a^0\left(\frac{\frac{a^2}{4p}-p}{a}\right)y+p-\frac{y^2}{4p}\,dy+\int_0^b\left(\frac{\frac{b^2}{4p}-p}{b}\right)y+p-\frac{y^2}{4p}\,dy$$

$$S=\frac{1}{24p}(b^3-a^3)+\frac{1}{2}p(b-a)$$

問2　点 P の y 座標は $\frac{a+b}{2}$ である。

$$T=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{1}{4p}(y-a)^2\,dy+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\frac{1}{4p}(y-b)^2\,dy$$

$$=\frac{1}{48p}(b-a)^3$$

問 3　$S=T$ より

$$\frac{1}{24p}(b^3-a^3)+\frac{1}{2}p(b-a)=\frac{1}{48p}(b-a)^3 \iff b^2+4ba+a^2+24p^2=0$$

$m=-\frac{b}{a}$ とおくと，

$(m^2-4m+1)a^2+24p^2=0$ となる $a<0$ と，$b=-ma>0$ が存在する m の範囲が答えとなる。

以上より，$m>0$ と $m^2-4m+1<0$ を連立すると

$$2-\sqrt{3}<m<2+\sqrt{3}$$

$$\therefore 2-\sqrt{3}<-\frac{b}{a}<2+\sqrt{3}$$

〔IV〕

問 1　$f(x)=e^{x^2}$，$g(x)=a\log x+b$ とする。

C_1 と C_2 がただ一つの共有点を持つのは，共有点において 2 曲線の接線が一致するときである。

$\begin{cases} f(a)=g(a) \\ f'(a)=g'(a) \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} e^{a^2}=a\log a+b \\ 2ae^{a^2}=\dfrac{a}{a} \end{cases}$

以上より，$a=2a^2e^{a^2}$，$b=e^{a^2}-2a^2e^{a^2}\log a$

問 2 バウムクーヘン分割の公式を用いると，

$$V(a)=\int_{a^{\frac{3}{2}}}^{a} 2px\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

$$=\int_{a^{\frac{3}{2}}}^{a} 2px\{xe^{x^2}-ax\log(x-bx)\}\,dx$$

$$=2p\left[\frac{1}{2}e^{x^2}-\frac{1}{4}a(2x^2\log x-x^2)-\frac{1}{2}bx^2\right]_{a^{\frac{3}{2}}}^{a}$$

上式を計算し、問 1 の結果を代入すると，

$$V(a)=p\left\{(1-a^2+a^3+a^4-a^5+a^5\log a)e^{a^2}-e^{a^3}\right\}$$

問 3

$h(t)=e^{-t}-1+t-\dfrac{t^2}{2}$ とおく。　$h(0)=0$，$h'(t)=-e^{-t}+1-t$，

$h'(0)=0$，$h''(t)=e^{-t}-1\leqq 0$

以上より，$h(t)$ は単調減少であり，$h(t)\leqq h(0)=0$

また $H(t)=h(t)+\dfrac{t^3}{6}$ とおくと，$H(0)=0$，$H'(t)=-h(t)\geqq 0$ より

$H(t)$ は単調増加なので $H(t)\geqq H(0)=0$

ゆえに題意は示された。

問 4　問 2 より

$$V(a)=p\left\{(1-a^2+a^3+a^4-a^5+a^5\log a)-e^{a^3-a^2}\right\}e^{a^2}$$

問 3 より , $o\leqq t\leqq 1$ において

$$1-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\leqq e^{-t}\leqq 1-t+\frac{t^2}{2}$$ が成り立っている。

$t=a^2-a^3$ とすると

$$1-a^2+a^3+\frac{(a^2-a^3)^2}{2}-\frac{(a^2-a^3)^3}{6}\leqq e^{-a^2+a^3}\leqq 1-a^2+a^3+\frac{(a^2-a^3)^2}{2}$$ が成り立つ

ので , 以上をまとめて計算すると ,

$$p\left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a^2+a\log a}{a^{c-4}}\right)e^{a^2}\leqq\frac{V(a)}{a^c}\leqq\left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a^2+a\log a+\frac{1}{6}a^2(1-a)^3}{a^{c-4}}\right)e^{a^2}$$

が成り立つ 。

$c>4$ のとき , 左辺 $\to\infty$ となり不適　$(a\to+0)$

$c=4$ のとき ， 左辺$\to\frac{p}{2}$ ，右辺$\to\frac{p}{2}$ より , $\frac{V(a)}{a^c}\to\frac{p}{2}$　$(a\to+0)$

$0<c<4$ のとき ，左辺$\to 0$ ，右辺 $\to 0$ より , $\frac{V(a)}{a^c}\to 0$　$(a\to+0)$ より ，不適 。

となるので $\lim_{a\to+0}\frac{V(a)}{a^c}$ が存在し , かつその極限値が正となるのは ,

$c=4$, $\lim_{a\to+0}\frac{V(a)}{a^4}=\frac{p}{2}$

【　講　評　】

全体的な難易度，計算量は例年通りであるが，やはり計算量がかなり多いので手際よく解き，取捨選択をしっかりと出来ないと突破は厳しいと考えられる。Ⅰ，Ⅱでしっかりと得点しておきたい。目標 50~60％である。

Ⅰ．確率	難易度：　標準
計算量が多く，緻密な場合分けが必要であったが，他の問題を考えるとここはしっかり得点しておきたい。余事象もうまく使うと計算が少し楽になったであろう。	
Ⅱ．二次関数，微分法	難易度：　標準
問１，問２は基本問題であり，問３は図形を書き考察しなければならなく，やや複雑ではあったが，完答しておきたい問題である。	
Ⅲ．積分の応用	難易度：　難
問１，問２の問題は問題的には難易度は高くなかったが，解釈が難しかったのではないだろうか。また計算量も多く手こずった受験生も多かっただろう。問３は存在条件を考えるあまり見慣れないかなり難しいものであった。完答は難しいだろう。	
Ⅳ.積分の応用	難易度：難
考え方は基本的なものであったが，計算量がかなり多く時間内に完答は難しいと思われる。取捨選択して，問３まできっちり解ければ問題ないと思われる。	