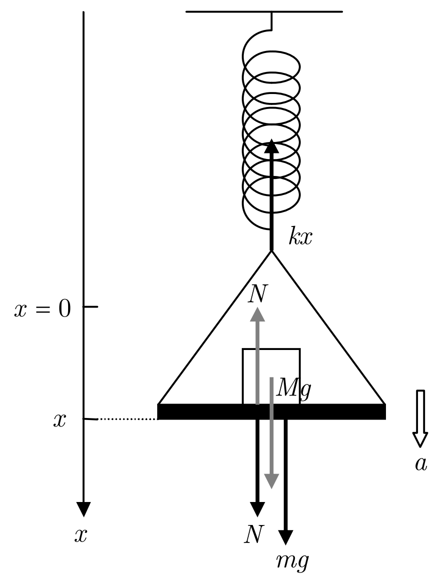
[I]　ばねの付いた板上の物体の鉛直方向の単振動

ばねが自然長のより伸びている間は，板と物体は一体となって，力のつり合いの位置を中心とした単振動を行う。ばねの自然長の位置に達すると，物体は板から離れ，二つの物物体はその位置より，鉛直投げ上げ運動を行い，板は新たなつり合いの位置を中心に単独で単振動を始める。

ア．鉛直方向の力のつり合いより，

$$0=(M+m)g-kx \quad \therefore x=\frac{(M+m)g}{k}=\frac{(0.90+0.10)\times 10}{1.0\times 10^2}=\underline{1\times 10^{-1}}\ \mathrm{m}(=\overline{x}\text{ と置く})$$

イ．運動中に板が位置 x にあるときの加速度を a，板と物体の間に働く抗力の大きさを N とすると，運動方程式は，



物体： $Ma=Mg-N \quad \cdots①$

板： $ma=mg+N-kx \quad \cdots②$

①＋②より， $(M+m)a=(M+m)g-kx$

$$\therefore a=-\frac{k}{M+m}(x-\overline{x})$$

これより，物体と板は一体となって

「$x=\overline{x}$ の位置を中心に角振動数 $\omega=\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$ の単振動を行う」。その周期 T は,

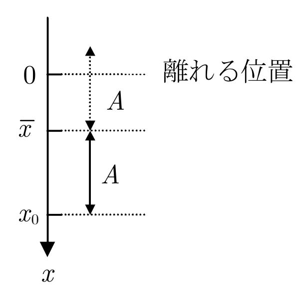
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}=2\times 3.14\times\sqrt{\frac{0.90+0.10}{1.0\times 10^2}}=\underline{6\times 10^{-1}}\ \mathrm{s}$$

ウ．①より， $N=M(g-a)=\dfrac{Mk}{M+m}x$

物体が板から離れる位置は「$N=0$」として， $x=\underline{0}\ \mathrm{m}$

エ．初期条件より，一体となって振幅 $A=x_0-\overline{x}$ の単振動を開始するので，条件は(右図を参照して)，「$A>\overline{x}-0$」より，

$$x_0-\overline{x}>\overline{x}-0 \quad \therefore x_0>2\overline{x}=\underline{2\times 10^{-1}}\ \mathrm{m}$$



オ．一体となって単振動する間，位置 x での速さを v とすると，振動中心を基準とした力学的エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2+\frac{1}{2}k(x-\overline{x})^2=\frac{1}{2}k(x_0-\overline{x})^2 \Leftrightarrow v^2=\frac{k}{M+m}\left\{(x_0-\overline{x})^2-(x-\overline{x})^2\right\}$$

が成立する。離れる位置の速さは $x=0$ として，

$$v^2=\frac{1.0\times10^2}{0.90+0.10}\left\{(0.40-0.1)^2-0.1^2\right\}=8\ \mathrm{m^2/s^2}$$

この後，物体は $x=0$ より，鉛直投げ上げ運動になるので，$x=0$ から最高点までの高さを h とすると，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}Mv^2=Mgh \quad \therefore h=\frac{v^2}{2g}=\frac{8}{2\times10}=4\times10^{-1}\ \mathrm{m}$$

求める最高点の位置 x は，$x=-h=\underline{-4\times10^{-1}}\ \mathrm{m}$

[Ⅱ]　電磁場内での荷電粒子の運動

荷電粒子は，$y>0$ の領域では磁場から受けるローレンツ力を向心力とした等速円運動(本問は半円)を行い，$y<0$ の領域では電場から受けるクーロン力により等加速度運動(鉛直投げ上げ運動に相当する運動)を行う。

ア．等速円運動の半径を r とすると，円運動の運動方程式より，

$$m\frac{v^2}{r}=qvB \quad \therefore r=\frac{mv}{qB}$$

等速円運動の周期を T，求める時間を t_1 とすると，

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi m}{qB} \quad \therefore t_1=\frac{T}{2}=\underline{\frac{\pi m}{qB}}$$

イ．この間に進んだ距離を d とすると，d は円軌道の直径に等しく，

$$d=2r=\underline{\frac{2mv}{qB}}$$

ウ．加速度を α とすると，運動方程式は,

$$m\alpha=qE \quad \therefore \alpha=\frac{qE}{m}$$

求める時間を t_2 とすると，位置に着目して,

$$(y=)-vt_3+\frac{1}{2}\alpha t_3{}^2=0 \quad \therefore t_3=\frac{2v}{\alpha}=\underline{\frac{2mv}{qE}}$$

または，速度に着目して，$v=-v+\alpha t_3 \quad \therefore t_3=\dfrac{2v}{\alpha}=\underline{\dfrac{2mv}{qE}}$

エ．荷電粒子は周期的な運動を繰り返し，x 軸方向を進んで行く。この周期を τ とすると，

$$\tau=t_1+t_2=\frac{m}{q}\left(\frac{\pi}{B}+\frac{2v}{E}\right)$$

平均の速さを $\overline{v}$ とすると，距離 d を時間 τ で進むことになるので,

$$\overline{v}=\frac{d}{\tau}=\frac{\dfrac{2mv}{qB}}{\dfrac{m}{q}\left(\dfrac{\pi}{B}+\dfrac{2v}{E}\right)}=\frac{2v}{\pi+2v\dfrac{B}{E}}=\frac{2}{\dfrac{\pi}{v}+2\dfrac{B}{E}}$$

v が非常に大きくなると，$v\to\infty$ として,

$$\overline{v}\to\underline{\frac{E}{B}}$$

オ．荷電粒子は $y<0$ の領域で「斜方投射に相当する運動」を行う。再び $y=0$ に戻る時間を t_3 とすると，

$$(y=)-v\sin\theta\cdot t_3+\frac{1}{2}\alpha {t_3}^2=0 \quad \therefore t_3=\frac{2mv\sin\theta}{qE}$$

条件は，「$v\cos\theta\cdot t_3=2r\sin\theta$」より，

$$\frac{2mv^2\sin\theta\cos\theta}{qE}=\frac{2mv\sin\theta}{qB} \quad \therefore \cos\theta=\underline{\frac{E}{vB}}$$

[Ⅲ]　熱気球の原理

熱気球の原理を問う問題。本問は高度による圧力変化を考察する部分を含む。この場合，大気と熱気球内の温度がそれぞれ一定に保たれている条件設定になっている点に注意する。設問$\boxed{ア}$で問われた式を正しく導き出しているかが鍵となる。

以下では，$V = 2200\ \mathrm{m^3}$，$m = 200.0\ \mathrm{kg}$，$T_0 = 290.0\ \mathrm{K}$，$P_0 = 1.100\times10^5\ \mathrm{Pa}$，$d_0 = 1.200\ \mathrm{kg/m^3}$ とする。

ア．平均分子量 M の気体 1 mol の質量は $M\times10^{-3}\ \mathrm{kg}$ となる。温度 T のとき気体の密度を d とすると，体積 V 内の気体の質量は dV より，理想気体の状態方程式は，

$$PV = \frac{dV}{M\times10^{-3}}RT \qquad \therefore \frac{R}{M} = \underline{\frac{P}{dT}\times10^{-3}}$$

この関係式より，$\dfrac{P}{dT} =$ 一定　…①　となる。

イ．$T_1 = 319.0\ \mathrm{K}$ とし，このときの密度を d_1 とすると，①より，

$$\frac{P_0}{d_1T_1} = \frac{P_0}{d_0T_0} \qquad \therefore d_1 = \frac{T_0}{T_1}d_0$$

気球内部の空気の減少量を Δm とすると，

$$\Delta m = d_0V - d_1V = \left(1-\frac{T_0}{T_1}\right)d_0V = \left(1-\frac{290.0}{319.0}\right)\times1.200\times2200 = \underline{2.40\times10^2}\ \mathrm{kg}$$

ウ．温度 T のときの気体の密度を d とすると，①より，

$$\frac{P_0}{dT} = \frac{P_0}{d_0T_0} \qquad \therefore d = \frac{T_0}{T}d_0$$

浮上条件「$d_0Vg > dVg + mg$」より，

$$d_0V > \frac{T_0}{T}d_0V + m \qquad \therefore T > \frac{d_0V}{d_0V-m}T_0$$

最低の温度を T_2 とすると，

$$T_2 = \frac{d_0V}{d_0V-m}T_0 = \frac{1.200\times2200}{1.200\times2200-200.0}\times290.0 \fallingdotseq \underline{3.14\times10^2}\ \mathrm{K}$$

エ．オ．温度T_2のときの気体の密度をd_2とすると，①より，

$$\frac{P_0}{d_2T_2}=\frac{P_0}{d_0T_0}\quad \therefore d_2=\frac{T_0}{T_2}d_0\quad T_2=\frac{d_0V}{d_0V-m}T_0\text{を用いると，}\ d_2=d_0-\frac{m}{V}\quad \cdots②$$

熱気球が静止した高度の大気の圧力をP，密度をd，熱気球内の気体の密度をd_3とすると，①より，

$$\text{大気：}\frac{P}{dT_0}=\frac{P_0}{d_0T_0}\quad \therefore d=\frac{P}{P_0}d_0\qquad \text{熱気球内：}\frac{P}{d_3T_2}=\frac{P_0}{d_2T_2}\quad \therefore d_3=\frac{P}{P_0}d_2$$

$m'=m-50.00=150.00\,\mathrm{kg}$として，この高度における力のつり合いの式は,

$$dVg=d_3Vg+m'g\quad \therefore \frac{P}{P_0}d_0=\frac{P}{P_0}d_2+m'$$

②を用いると，

$$P=\frac{m'}{(d_0-d_2)V}P_0=\frac{m'}{m}P_0=\frac{150.00}{200.00}\times\left(1.100\times10^5\right)=\underline{8.25}_{オ}\times10^4\,\mathrm{Pa}$$

このとき,

$$d=\frac{P}{P_0}d_0=\frac{m'}{m}d_0=\frac{150.00}{200.00}\times1.200=\underline{9.00\times10^{-1}}_{エ}\,\mathrm{kg/m^3}$$

[Ⅳ]　回折格子と単スリットによる光の干渉

回折格子による光の干渉と単スリットによる光の干渉の問題。単スリットによる光の干渉に関しては，解いたことがあるかないかの差が出たと思われる問題である。

問１　回折格子による光の干渉

ア．回折角(強い干渉光が現れる方向)を θ とすると，干渉して強め合う条件は，m を任意の整数として，

$$d\sin\theta = m\lambda \quad \therefore \sin\theta = m\frac{\lambda}{d} \quad \text{近似して，} \quad \theta \fallingdotseq m\frac{\lambda}{d}$$

スクリーン上で中心点 O を原点として最も明るい位置を y とすると(近似して)，

$$y = L\tan\theta \fallingdotseq L\theta = m\frac{\lambda L}{d}\,(= y_m \text{ と置く})$$

明点間隔を $\varDelta y$ とすると，

$$\varDelta y = y_{m+1} - y_m = \underline{\frac{\lambda L}{d}}$$

イ．回折角を θ' とすると，相隣り合う光の光路差が「$nd\sin\theta' + d\sin\alpha$」となるので，強め合う条件は，

$$nd\sin\theta' + d\sin\alpha = m\lambda \quad \text{近似して，} \quad \theta' = m\frac{\lambda}{nd} - \frac{\alpha}{n}$$

スクリーン上での明点の位置を y' とすると，

$$y' \fallingdotseq L\theta' = m\frac{\lambda L}{nd} - \frac{\alpha L}{n}$$

中心点 O($m = 0$)が移動した距離を δy とすると，

$$\delta y = \underline{\frac{\alpha L}{n}}$$

問 2　単スリットによる干渉

ウ．点 A と点 C の間の光路差は「$\frac{D}{2}\sin\theta$」より，位相差を $\Delta\phi$ とすると，

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{D}{2}\sin\theta\right) = \underline{\frac{\pi D\sin\theta}{\lambda}}$$

エ．最初の暗点の生じる角度を θ_1 とすると，

$$\frac{\pi D\sin\theta_1}{\lambda} = \pi \quad \therefore \sin\theta_1 = \frac{\lambda}{D} \quad 近似して\ \theta_1 \fallingdotseq \frac{\lambda}{D}$$

最初の暗点までの距離を l_1 とすると(近似して),

$$l_1 = L\tan\theta_1 \fallingdotseq L\theta_1 = \underline{\frac{\lambda L}{D}}$$

オ．2 番目の暗点が生じる角度を θ_2 とすると，AC，CB をそれぞれ 2 つに分割して，同様に考えると，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{D}{4}\sin\theta_2\right) = \pi \quad \therefore \sin\theta_2 = \frac{2\lambda}{D} \quad 近似して，\ \theta_2 \fallingdotseq \frac{2\lambda}{D}$$

2 番目の暗点までの距離を l_2 とすると(近似して),

$$l_2 = L\tan\theta_2 \fallingdotseq L\theta_2 = \underline{\frac{2\lambda L}{D}}$$