進学塾ビッグバン BIG BANG

解答速報 数学

2021 年度 昭和大学(前期) 一般入学試験

$\boxed{1}$

(1) 円 C_2 の半径は C_1 と同じく $2\sqrt{7}$ である。

2 点 E, F の y 座標が 0 以上であることから，円 C_2 の中心 D の y 座標も 0 以上である。

また，円 C_2 は点 C において x 軸に接するから，その中心の座標は $D(\sqrt{7}, 2\sqrt{7})$

ゆえに，円 C_2 の方程式は

$$(x-\sqrt{7})^2+(y-2\sqrt{7})^2=(2\sqrt{7})^2$$

$$\therefore (x-\sqrt{7})^2+(y-2\sqrt{7})^2=28$$

(2) 点 G は 2 点 O, D の中点であるから

$$G\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \sqrt{7}\right)$$

であり，その半径 GF は直角三角形 OGF に着目して

$$GF=\sqrt{OF^2-OG^2}$$

$$=\sqrt{28-\frac{35}{4}}=\sqrt{\frac{77}{4}}$$

であるから，円 C_3 の方程式は

$$\left(x-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+(y-\sqrt{7})^2=\frac{77}{4}$$

(3) 円 C_3 と y 軸の交点の y 座標は，C_3 の方程式に $x=0$ を代入して

$$\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+(y-\sqrt{7})^2=\frac{77}{4}$$

$$(y-\sqrt{7})^2=\frac{70}{4}$$

$$y-\sqrt{7}=\pm\frac{\sqrt{70}}{2}$$

$$\therefore y=\sqrt{7}\pm\frac{\sqrt{70}}{2}$$

よって 2 点間の距離は

$$\left(\sqrt{7}+\frac{\sqrt{70}}{2}\right)-\left(\sqrt{7}-\frac{\sqrt{70}}{2}\right)=\sqrt{70}$$

(4) 円 C_1 の方程式は

$$x^2+y^2=28$$

折り返して出来る円弧と x 軸との接点を $T(t,0)$ $(-2\sqrt{7}\leqq t\leqq 2\sqrt{7})$ とおく。

折り返して出来る円弧を含む円を C_4 とすると，

円 C_4 の方程式は

$$(x-t)^2+(y-2\sqrt{7})^2=28$$

であり，さらに直線 PQ の方程式は

$x^2+y^2-28+k((x-t)^2+(y-2\sqrt{7})^2-28)=0$ の $k=-1$ のときだから，

$2tx+4\sqrt{7}\,y-t^2-28=0$ である。

弦 PQ の存在領域は，

t が $-2\sqrt{7}\leqq t\leqq 2\sqrt{7}$ を動くときの直線 PQ の存在領域のうち

$x^2+y^2\leqq 28$ を満たす部分である。

t が $-2\sqrt{7}\leqq t\leqq 2\sqrt{7}$ を動くときの直線 PQ の存在領域は，

$$2tx+4\sqrt{7}\,y-t^2-28=0 \iff t^2-2xt-4\sqrt{7}\,y+28=0$$

が $-2\sqrt{7}\leqq t\leqq 2\sqrt{7}$ に少なくとも 1 つの解を持つような点 (x,y) の集合である。

以下 $f(t)=t^2-2xt-4\sqrt{7}\,y+28$ とする。

(ア) $x\leqq -2\sqrt{7}$ のとき

$$\begin{cases} f(-2\sqrt{7})\leqq 0 \\ f(2\sqrt{7})\geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y\geqq x+2\sqrt{7} \\ y\leqq -x+2\sqrt{7} \end{cases}$$

(イ) $-2\sqrt{7}\leqq x\leqq 2\sqrt{7}$ のとき

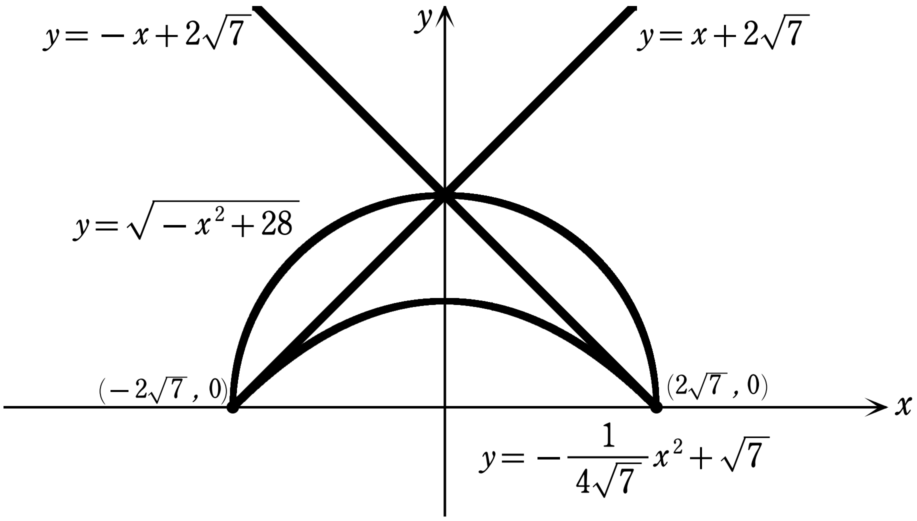
$$\begin{cases} -x^2-4\sqrt{7}\,y+28\leqq 0 \\ f(-2\sqrt{7})\geqq 0 \text{ または } f(2\sqrt{7})\geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y\geqq -\dfrac{1}{4\sqrt{7}}x^2+\sqrt{7} \\ y\leqq x+2\sqrt{7} \text{ または } y\leqq -x+2\sqrt{7} \end{cases}$$

(ウ) $2\sqrt{7}\leqq x$ のとき

$$\begin{cases} f(-2\sqrt{7})\geqq 0 \\ f(2\sqrt{7})\leqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y\leqq x+2\sqrt{7} \\ y\geqq -x+2\sqrt{7} \end{cases}$$

(ア)～(ウ) を満たす領域のうち，$x^2+y^2\leqq 28$ を満たす部分を図示すると，以下の斜線部になる。

2021 年度 昭和大学(前期) 一般入学試験



$\boxed{2}$

(1) □に入る数を$a(0 \leqq a \leqq 9)$とする。

以下,すべて8を法として考えるものとする。

$$2021a2 \equiv 0$$
$$202\times1000+100+10a+2 \equiv 0$$
$$2a+6 \equiv 0$$

これを満たすaは$a\equiv1,5,9$

(注)自然数Nが8の倍数$\Leftrightarrow N$の下3桁が8の倍数

(2) 条件を満たすのは,次の3つの場合である。

(ア)$n^2-9n+19=1$の場合

(イ)$n^2+5n-14=0$の場合

(ウ)$n^2-9n+19=-1$かつ$n^2+5n-14$が4の倍数の場合

(ア)の場合

$$n^2-9n+19=1$$
$$(n-3)(n-6)=0 \qquad \therefore n=3,6$$

(イ)の場合

$$n^2+5n-14=0$$
$$(n-2)(n+7)=0 \qquad \therefore n=2 \quad (\because n \geqq 1)$$

(ウ)の場合

$$n^2-9n+19=-1$$

$(n-4)(n-5)=0 \qquad \therefore n=4,5$

$n=4$のときは$n^2+5n-14=22$であり不適。

$n=5$のときは$n^2+5n-14=36$となり,4の倍数であるから適する。

以上により,$n=2,3,5,6,$

(3) 条件より

$$m+(m+2)+(m+4)+\cdots\cdots+(m+2^n)=1000 \quad (m\geqq 1, n\geqq 1)$$

$$m(n+1)+\sum_{k=1}^{n}2^k=1000$$

$$m(n+1)+2(2^n-1)=1000$$

$$m(n+1)=2(501-2^n)\cdots\cdots①$$

$m(n+1)\geqq 0$であるから,

$$501-2^n\geqq 0$$

$$2^n\leqq 501$$

$$\therefore 1\leqq n\leqq 8$$

この範囲で①を満たす(n,m)は

$$(n,m)=(1,499),(4,194)$$

よって,求める数字の組(*)は

$(499,501),(194,196,198,202,210)$

$\boxed{3}$

$(1-1)$取り出した球が3個とも白球である確率は,袋の中にある球の個数に注意して

$$\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{7}{24}$$

したがって,取り出した球が少なくとも1個は赤球であった確率は,余事象を考えて

$$1-\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$$

$(1-2)$袋に残った球が8個であったのは,途中2個の赤球を袋から取り出したときであるので,3回目に取り出したのが白球であることを踏まえると,次の2通りの取り出し方が考えられる。

	1回目	2回目	3回目
i)	赤球	白球	白球
ii)	白球	赤球	白球

進学塾ビッグバン
BIG BANG

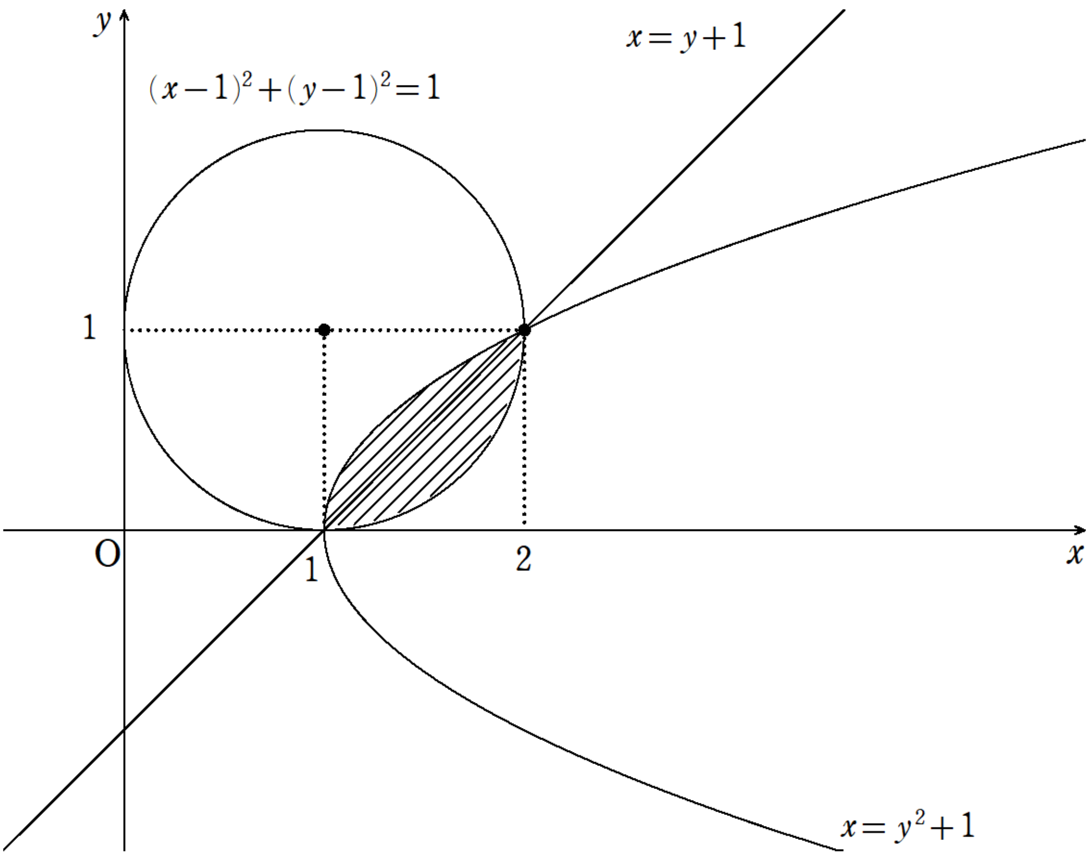
解答速報 数学

2021 年度 昭和大学(前期) 一般入学試験

i)ii)は互いに排反であるから,求める確率は

$$\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{9}=\frac{133}{450}$$

(2−1)図形Aを図示すると,下図の斜線部分のようになる。ただし,境界を含む。



2曲線交点を通る直線の方程式は$y=x-1 \Leftrightarrow x=y+1$であるので,求める面積$S$は

$$S=\left(\frac{1^2}{2}\cdot\frac{p}{2}-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\right)+\int_0^1\{(y+1)-(y^2+1)\}dy$$

$$=\frac{p}{4}-\frac{1}{2}+\left[-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}\right]_0^1$$

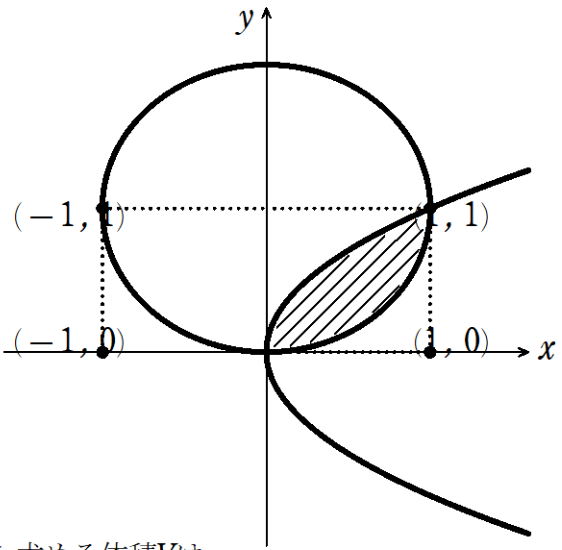
$$=\frac{p}{4}-\frac{1}{3}$$

進学塾ビッグバン
BIG BANG

解答速報　数学

2021年度　昭和大学(前期)　一般入学試験

(2−2)図形Aをx軸方向に-1だけ平行移動して考える。このとき,$x=y^2$に対応するyをy_1,$x^2+(y-1)^2=1, y\leqq 1 \Leftrightarrow y=1-\sqrt{1-x^2}$に対応する$y$を y_2とする。



このとき,求める体積Vは

$$\frac{V}{\pi}=\int_0^1 y_1{}^2dx-\int_0^1 y_2{}^2dx$$

$$=\int_0^1 xdx-\int_0^1\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2dx$$

$$=\int_0^1\left(x-2+x^2+2\sqrt{1-x^2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-2x+\frac{x^3}{3}\right]_0^1+2\cdot\frac{\pi}{4}\left(\because\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx\text{は半径1の四分円の1つの面積を表す。}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{7}{6}$$

よって,$V=\dfrac{\pi^2}{2}-\dfrac{7}{6}\pi$

$\boxed{4}$

(1−1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ より，求める面積は πab

(1−2) 曲面 $px^2+qy^2=z+2\geqq 0$ より，$z\geqq -2$ となる。

ここで $z=k\ (-2\leqq k\leqq 0)$ による曲面との断面を考えると，

$$px^2+qy^2=k+2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{k+2}{p}}+\frac{y^2}{\frac{k+2}{q}}=1$$

となるので，断面積 $S(k)$ は $\dfrac{\pi}{\sqrt{pq}}(k+2)$ 　$(\because(1-1))$

したがって求める体積 V は

$$V=\int_{-2}^{0}S(k)dk=\int_{-2}^{0}\frac{\pi}{\sqrt{pq}}(k+2)dk$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{pq}}\left[\frac{k^2}{2}+2k\right]_{-2}^{0}$$
$$=\frac{2\pi}{\sqrt{pq}}$$

(2−1) A と B それぞれの硬貨の表の出る枚数とその確率の計算式および計算結果は下の表のようになる。

	0	1	2	3	4
A	$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$	${}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$	${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$	${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$
B	$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$	${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$	${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$	

ここで，A と B の表が出る枚数をそれぞれ x, y 枚 $(0\leqq x\leqq 4, 0\leqq y\leqq 3)$ とすると，A が勝つのは

$x=1$ のとき，$y=0$
$x=2$ のとき，$y=0,1$
$x=3$ のとき，$y=0,1,2$
$x=4$ のとき，$y=0,1,2,3$

のときであるから，A の勝つ確率は計算すると，$\dfrac{1}{2}$

また引き分けとなるのは $x=y$ のときだから，引き分けの確率を計算すると，$\dfrac{35}{128}$

また B の確率は，A の勝たないときだから，

$$1-\frac{1}{2}-\frac{35}{128}=\frac{29}{128}$$

(2−2) 銀貨 1 枚の額面を $x\,(x>0)$，金貨 1 枚の額面をその a 倍 (aは自然数) の ax とする。

このとき，勝ち取る金額の期待値は (2−1) より

$$A\cdots\frac{1}{2}\cdot 3\cdot x=\frac{3}{2}x \quad , \quad B\cdots\frac{29}{128}\cdot 4\cdot ax=\frac{29}{32}ax$$

となる．したがって，B 勝ち取る金額の期待値が A よりも高くなるとき，

$$\frac{29}{32}ax>\frac{3}{2}x \quad \Leftrightarrow a>\frac{48}{29} \quad (\because x>0)$$

よって a が自然数であるから $a=2$ すなわち，金貨の額面が銀貨の額面の 2 倍となっていればよい。

【　講　評　】

問題全体の難易度は高くはなく，方針は立てやすかったが，計算量が多く，手間取ったかもしれない。得点出来る部分は多かったので目標は 70%。

Ⅰ．図形と方程式	難易度：　標準
典型的な問題ではあったが，計算量が多く，慣れていなければ時間がかかる。手早く計算できるように普段から練習しておかないと差がついたであろう。	
Ⅱ．小問集合（整数）	難易度：　やや易
典型問題であり，出来ればすべて完答しておきたい問題であった。	
Ⅲ．小問集合（確率　積分）	難易度：　標準
両問とも基本問題であったが，やや計算量も多く，計算ミスには注意しておきたい。	
Ⅳ．小問集合（二次曲線　確率）	難易度：標準
（１）　は楕円を積み重ねて体積を求める問題で，誘導に乗れば難なくできたであろう。 （２）　頻出の期待値の問題である。初めにそれぞれの確率を求めておくとスムースに進められたであろう。	