$\boxed{1}$ 地表の物体の重さに対する月の影響

地表に置かれた物体の重さに対する月の影響を，単純化したモデルで定性的に考察する問題である。万有引力の法則のみを用いる。物体と地球に作用する月からの引力による加速度の差を，地表の重力加速度の補正項とみなして，地表の物体の重さの補正項とし，月の影響を考察する。問題文の指示に従って，計算を進めるとよい。但し，本問では「加速度」と「加速度の大きさ」を曖昧に用いているため，(h)では正負どちらも正解と考えられる。以下の解答では大きさを解答する。

$\boxed{\text{A}}$

(a)　$T=\underline{\dfrac{2\pi R_0}{v}}$　…①

(b)　万有引力を向心力とした等速円運動になるので，円運動の運動方程式より，

$$M\frac{v^2}{R_0}=\underline{G\frac{ME}{{R_0}^2}}\quad\cdots②\quad E=\frac{4}{3}\pi R^3 d \text{ を用いると，}\quad M\frac{v^2}{R_0}=\underline{\frac{4\pi GMR^3 d}{3{R_0}^2}}$$

どちらも可。

(c)　①，②より，vを消去すると，$T=2\pi\sqrt{\dfrac{{R_0}^3}{GE}}\Leftrightarrow\dfrac{GT^2}{4\pi^2}=\dfrac{{R_0}^3}{E}$

$E=\dfrac{4}{3}\pi R^3 d$ を用いると，$\left(\dfrac{R}{R_0}\right)^3=\underline{\dfrac{GT^2 d}{3\pi}}$

（参考）おおよその平均的な値「$R=6357\,\text{km}$，$R_0=384400\,\text{km}$」を用いると，

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^3\fallingdotseq 4.5\times10^{-6}$$

となる。

$\boxed{\text{B}}$

(d)　物体の質量をmとし，月から地球の中心方向を正として加速度をa_Aとすると，運動方程式より，

$$ma_\text{A}=-G\frac{mM}{(R_0-R)^2}\quad\therefore a_\text{A}=-\frac{GM}{(R_0-R)^2}\quad\text{大きさ：}|a_\text{A}|=\underline{\frac{GM}{(R_0-R)^2}}$$

(e)　地球に生じる加速度をAとすると，運動方程式より，

$$EA=-G\frac{ME}{{R_0}^2}\quad\therefore A=-\frac{GM}{{R_0}^2}\quad\text{大きさ：}|A|=\underline{\frac{GM}{{R_0}^2}}$$

(f)　$\dfrac{R}{R_0} \ll 1$ より，近似すると，

$$a_{\mathrm{A}} = -\frac{GM}{(R_0 - R)^2} = -\frac{GM}{R_0^{\,2}}\left(1 - \frac{R}{R_0}\right)^{-2} \fallingdotseq -\frac{GM}{R_0^{\,2}}\left(1 + \frac{2R}{R_0}\right)$$

加速度の差を $\varDelta g_{\mathrm{A}}$ とすると，

$$\varDelta g_{\mathrm{A}} = a_{\mathrm{A}} - A \fallingdotseq -\frac{2GMR}{R_0^{\,3}} \quad 大きさ|\varDelta g_{\mathrm{A}}| = \underline{\frac{2GMR}{R_0^{\,3}}}$$

(1)　$\varDelta g_{\mathrm{A}} < 0$ より，方向は「<u>月の方向</u>」

(2)　加速度の差 $\varDelta g$ が，地球の中心方向となる場合は物体の重さが重くなり，逆方向の場合は軽くなる。$\varDelta g_{\mathrm{A}}$ は地球の中心方向とは逆方向より，A 点では「<u>軽く</u>」なる。

（注）重さの補正項は正確には $m\,|\,\varDelta g\,|$ である。

(g)　B 点の加速度を a_{B} とすると，

$$a_{\mathrm{B}} = -\frac{GM}{(R_0 + R)^2} \quad 大きさ：|a_{\mathrm{B}}| = \underline{\frac{GM}{(R_0 + R)^2}}$$

(h)　近似すると，$a_{\mathrm{B}} = -\dfrac{GM}{(R_0 + R)^2} = -\dfrac{GM}{R_0^{\,2}}\left(1 + \dfrac{R}{R_0}\right)^{-2} \fallingdotseq -\dfrac{GM}{R_0^{\,2}}\left(1 - \dfrac{2R}{R_0}\right)$

加速度の差を $\varDelta g_{\mathrm{B}}$ とすると，

$$\varDelta g_{\mathrm{B}} = a_{\mathrm{B}} - A = \frac{2GMR}{R_0^{\,3}} \quad 大きさ：|\varDelta g_{\mathrm{B}}| = \underline{\frac{2GMR}{R_0^{\,3}}}$$

(3)　$\varDelta g_{\mathrm{B}} > 0$ より，方向は「<u>月と逆向き</u>」

(4)　加速度の差 $\varDelta g_{\mathrm{B}}$ が，地球の中心方向とは逆方向より，B 点では「<u>軽く</u>」なる。

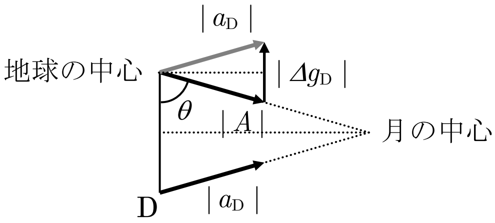
(i)　D 点での加速度の大きさを $|\,a_{\mathrm{D}}\,|$ とすると，

$$|\,a_{\mathrm{D}}\,| = \frac{GM}{R_0^{\,3}} = |\,A\,|$$

図のように角度 θ をとると，補正項 $|\,\varDelta g_{\mathrm{D}}\,|$ は，

$$|\,\varDelta g_{\mathrm{D}}\,| = 2A\cos\theta$$

ここで，$\cos\theta = \dfrac{R}{2R_0}$　$\therefore |\,\varDelta g_{\mathrm{D}}\,| = \underline{\dfrac{GMR}{R_0^{\,3}}}$



加速度の関係

(5)　図より，方向は「地球の中心」となる。

(6)　補正項 Δg_{D} が地球の中心方向となるので「重く」なる。

$\boxed{2}$ 磁場の中で運動する金属棒に生じる起電力と回路

一様な磁場内で等速円運動する金属棒に生じる起電力に関する基本的な問題である。

(1) 時間 Δt の間に金属棒 OK の角度は $\omega\Delta t$ 増加し，面積 $\Delta S = \dfrac{1}{2}l^2\omega\Delta t$ 分の磁束が増加するので，束の変化量を $\Delta\Phi$ とすると，

$$\Delta\Phi = B\Delta S = \underline{\frac{1}{2}Bl^2\omega\Delta t}$$

(2) 電磁誘導の法則より，

$$V = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \underline{\frac{1}{2}Bl^2\omega}$$ 方向：（レンツの法則より）<u>K→O</u>

(3) 電力 $P = \dfrac{V^2}{R} = \underline{\dfrac{B^2l^4\omega^2}{4R}}$

(4) 金属棒を流れる電流 I により，金属棒 OK が磁場より受ける力の大きさ F は，

$$F = IBl = \underline{\frac{B^2l^3\omega}{2R}}$$ 方向：回転方向と<u>逆方向</u>

$\boxed{3}$ 理想気体の状態変化

単原子分子理想気体の状態変化を扱った標準的な問題で，良く似た問題を解いたことのある受験生も多いと思われる。$\boxed{\mathbf{B}}$ の解答は，気体分子の平均速度と温度との関係を軸に論述すれば良い。

$\boxed{\mathrm{A}}$

(1) 圧力 P，体積 V，物質量 n，温度 T の単原子分子理想気体の内部エネルギー U は，理想気体の状態方程式「$PV = nRT$」を用いると，

$$U = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}PV$$

と表せる。この点を考慮して解答すると，

$$U_{\mathrm{B}} = \frac{3}{2}P_{\mathrm{B}} \cdot 2V = \underline{3P_{\mathrm{B}}V}，\quad U_{\mathrm{C}} = \frac{3}{2}P_{\mathrm{C}} \cdot 3V = \underline{\frac{9}{2}P_{\mathrm{C}}V}$$

(2) コック 1 を開ける前の容器 B 内の気体の温度を T_{B} とすると，理想気体の状態方程式より，

$$P_{\mathrm{B}} \cdot 2V = n_{\mathrm{B}}RT_{\mathrm{B}} \quad \therefore T_{\mathrm{B}} = \frac{2P_{\mathrm{B}}V}{n_{\mathrm{B}}R}$$

コックを開けると，条件より，断熱自由膨張になる。理想気体の断熱自由膨張では，温度変化が生じないので，

$$T_{\mathrm{AB}} = T_{\mathrm{B}} = \underline{\frac{2P_{\mathrm{B}}V}{n_{\mathrm{B}}R}}$$

このとき，理想気体の状態方程式より，

$$P_{\mathrm{AB}} \cdot 3V = nRT_{\mathrm{AB}} \quad \therefore P_{\mathrm{AB}} = \frac{nRT_{\mathrm{AB}}}{3V} = \underline{\frac{2}{3}P_{\mathrm{B}}}$$

（参考）断熱された状態で真空の容器内に気体が拡散して行く状態変化を断熱自由膨張という。断熱自由膨張では，気体は外部に仕事をしないので，熱力学第 1 法則より，内部エネルギーの変化は 0 となる。理想気体の内部エネルギーは温度 T のみで決まる(関数となる)ので，温度変化は生じない。

(3)　容器全体が断熱されているので，気体全体の内部エネルギーの総和は変化しない。したがって，

$$\frac{3}{2}P_{\mathrm{A\cdot C}}(V+2V+3V)=\frac{3}{2}P_{\mathrm{B}}\cdot 2V+\frac{3}{2}P_{\mathrm{C}}\cdot 3V \qquad \therefore P_{\mathrm{A\cdot C}}=\underline{\frac{2P_{\mathrm{B}}+3P_{\mathrm{C}}}{6}}$$

理想気体の状態方程式より，

$$P_{\mathrm{A\cdot C}}\cdot 6V=(n_{\mathrm{B}}+n_{\mathrm{C}})RT_{\mathrm{A\cdot C}} \qquad \therefore T_{\mathrm{A\cdot C}}=\underline{\frac{(2P_{\mathrm{B}}+3P_{\mathrm{C}})V}{(n_{\mathrm{B}}+n_{\mathrm{A}})R}}$$

(4)　条件から，容器内の気体は外部に対して PV_{D} の仕事をする。この間，熱の出入りはないので，熱力学第 1 法則より，

$$0=\left\{\frac{3}{2}P(6V+V_{\mathrm{D}})-\frac{3}{2}P_{\mathrm{A\cdot C}}\cdot 6V\right\}+PV_{\mathrm{D}} \qquad \therefore V_{\mathrm{D}}=\frac{18(P_{\mathrm{A\cdot C}}-P)V}{5P}=\underline{\frac{3(2P_{\mathrm{B}}+3P_{\mathrm{C}}-6P)V}{5P}}$$

理想気体の状態方程式より，

$$P(6V+V_{\mathrm{D}})=(n_{\mathrm{B}}+n_{\mathrm{C}})RT_{\mathrm{A\cdot D}} \qquad \therefore T_{\mathrm{A\cdot D}}=\underline{\frac{3(2P_{\mathrm{B}}+3P_{\mathrm{C}}+4P)V}{5(n_{\mathrm{B}}+n_{\mathrm{C}})R}}$$

$\boxed{\mathrm{B}}$

室温より温度の低い冷蔵庫内では，気体分子の平均速度が小さく，単位時間当たりにゴム膜に衝突する分子数が減少して，すり抜ける分子も減少するため。（67 字）

4 ドップラー効果

ドップラー効果の基本的な問題である。

(1) 音の速さは振動が媒質である空気を伝わる速さで，音源の運動によらないので，S の出す音波の速さは，$\underline{V}$

音源の運動により，音波の波長が変化する。観測者 A の方向には単位時間あたり距離 $V-v_S$ の間に f_S 個の波が存在するので，観測者 A に聞こえる音波の波長を λ_1 とすると，

$$\lambda_1 = \underline{\frac{V-v_S}{f_S}}$$

観測者 A が観測する振動数を f_A とすると，波の要素間の関係式より，

$$f_A = \frac{V}{\lambda_1} = \underline{\frac{V}{V-v_S}f_S} \quad \cdots ①$$

(2) 観測者 B から見みると，音源 S は $v_S\cos\theta$ で近づいて来る。観測者 B が観測する振動数を f_B とすると，①で $v_S \to v_S\cos\theta$ として，

$$f_B = \underline{\frac{V}{V-v_S\cos\theta}f_S}$$

(3) 反射板 R が受け取る音の振動数を f_R とすると, 静止している音源 S に観測者が速さ v_R で近づく場合と同様で，

$$f_R = \frac{V+v_R}{V}f_S$$

観測者 A が観測する振動数を f_1 とすると，振動数 f_R の音源が速さ v_R で近づく場合と同様で，

$$f_1 = \frac{V}{V-v_R}f_R = \underline{\frac{V+v_R}{V-v_R}f_S}$$

音源 S から直接聞こえる音の振動数は f_S より，1 秒間のうなりの回数を n_1 とすると，

$$n_1 = f_1 - f_S = \underline{\frac{2v_R}{V-v_R}f_S}$$

(4)　音源 S から観測者 A に直接届く音波の振動数を f_2 とすると，

$$f_2 = \frac{V - v_{\mathrm{A}}}{V - v_{\mathrm{S}}} f_{\mathrm{S}}$$

反射板 R が受け取る音源 S から音の振動数を f_{R}' とすると，

$$f_{\mathrm{R}}' = \frac{V - v_{\mathrm{R}}}{V - v_{\mathrm{S}}} f_{\mathrm{S}}$$

観測者 A が観測する反射板 R から反射して来た音の振動数を f_3 とすると，

$$f_3 = \frac{V + v_{\mathrm{A}}}{V + v_{\mathrm{R}}} f_{\mathrm{R}}' = \frac{(V + v_{\mathrm{A}})(V - v_{\mathrm{R}})}{(V + v_{\mathrm{R}})(V - v_{\mathrm{S}})} f_{\mathrm{S}}$$

1 秒間のうなりの回数を n_2 とすると，

$$n_2 = |f_2 - f_3| = \underline{\frac{2V|v_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{R}}|}{(V + v_{\mathrm{R}})(V - v_{\mathrm{S}})} f_{\mathrm{S}}}$$