2022年度私大医学部入試
解答速報（解説付き）

東京慈恵会医科大学【数学】

解答速報 実施大学

◆杏林(医)	◆東京医科	◇埼玉医科(後期)
◆東北医科薬科	◆埼玉医科(前期)	◇日本医科(後期)
◆関西医科(前期)	◆東京慈恵会医科	◇昭和医科(II期)
◆近畿(医/前期)	◆大阪医科薬科(前期)	
◆昭和(医/Ｉ期)		

講評

1　　確率	難易度：標準
状態が遷移していくタイプの確率で典型的な問題だが、取りうる状態が多いので必要な部分だけを要領よく調べていくことが大切である。	
2　　微分法・積分法	難易度：やや易
微分可能性、最大最小、回転体の体積に関する教科書レベルの基本問題でこれは落とせない。完答必須である。	
3　　整数	難易度：標準
約数の個数に関する問題で、中学入試にも現れるくらい有名なテーマである。条件として与えられた不等式を如何にして約数の個数に結び付けるかが正解への鍵となるが、少し調べてみれば見当はつくだろう。	
4　　複素数平面・式と曲線	難易度：標準
ジューコフスキー変換による円の像を求める問題で出題例も少なくない。楕円の問題もありきたりで有名問題をそのまま持ってきた印象がある。	
全体	難易度：標準
全体を通して易しくなった。思考力も計算力も大して必要のない問題ばかりである。	

1

袋 A の白玉、赤玉の個数をそれぞれ a,b 、袋 B の白玉、赤玉の個数をそれぞれ c,d とし、それを

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

と表すことにする。また、

W : 袋から取り出された玉が 2 つとも白

R : 袋から取り出された玉が 2 つとも赤

S : 袋 A から取り出された玉が白、袋 B から取り出された玉が赤

T : 袋 A から取り出された玉が赤、袋 B から取り出された玉が白

とする。それぞれの事象に対して、袋の中の玉の個数は

$$W : \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S : \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T : \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$$

と変化する。

● 操作を 2 回繰り返した後に袋 A の赤玉が 1 個となるのは、

$$\text{(i)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow{S:\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{T:\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow{T:\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xRightarrow{S:1\times1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iii)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow{R:\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{T:\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}$$

の場合であるから、その確率は

$$\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\times1+\frac{2}{9}\times\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{59}{162}}\,.$$

● 操作を 3 回繰り返した後に袋 A の赤玉が 0 個となるためには、操作を 2 回繰り返した後に袋 A の玉が 1 個である必要がある。上の(iii)の過程の後に事象 T は起きないことに注意すると、操作を 3 回繰り返した後に袋 A の赤玉が 0 個となるのは

$$\text{(i}'\text{)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow{S:\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{T:\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow{T:\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ \mathbf{0} & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{(ii}'\text{)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow{T:\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xRightarrow{S:1\times1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow{T:\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ \mathbf{0} & 3 \end{pmatrix}$$

の場合であるから、その確率は

$$\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\times1\times\frac{1}{9}=\mathbf{\frac{25}{729}}\,.$$

2

(1)

$$
\begin{aligned}
f'_{+}(-a) &= \lim_{x\to -a+0} \frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)} \\
&= \lim_{x\to -a+0} \frac{1}{x+a}\cdot\frac{|x+a|}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to -a+0} \frac{1}{x+a}\cdot\frac{x+a}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to -a+0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'_{-}(-a) &= \lim_{x\to -a-0} \frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)} \\
&= \lim_{x\to -a-0} \frac{1}{x+a}\cdot\frac{|x+a|}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to -a-0} \frac{1}{x+a}\cdot\frac{-(x+a)}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to -a-0} \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{a^2+1}}\ .
\end{aligned}
$$

右微分係数$f'_{+}(-a)$ と左微分係数 $f'_{-}(-a)$ が一致しないので、$f(x)$ は $x=-a$ で**微分不可能**。

(2)

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+1}} & (x \geq -a) \\ \dfrac{-x-a}{\sqrt{x^2+1}} & (x < -a) \end{cases}
$$

より

$$
f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-ax+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} & (x > -a) \\ \dfrac{ax-1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} & (x < -a) \end{cases}
$$

であるから、$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$f(1/a)$	↘

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-a}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1-\frac{a}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \quad \left(\because\ \ x = -\sqrt{x^2}\right)$$

$$= 1\ .$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\frac{1}{a}+1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}}$$

$$= \frac{a+1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$> \frac{a+1}{\sqrt{a^2+2a+1}} \quad (\because\ \ a>0\ )$$

$$= 1\ .$$

よって、

$$Max\, f(x) = \frac{a+1}{\sqrt{a^2+1}}$$

である。したがって、

$$Max\, f(x) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+1}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^2 = 2(a^2+1)$$

$$\Leftrightarrow a^2-2a+1=0$$

$$\Leftrightarrow a = \mathbf{1}\,.$$

(3)　$y=f(x)$ のグラフは Fig.1 のようになる。よって体積 V は

$$V = \pi\int_{-1}^{0}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{0}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \pi \left[x + \log(x^2 + 1) \right]_{-1}^{0}$$
$$= \boldsymbol{\pi\,(1 - \log 2)}\ .$$

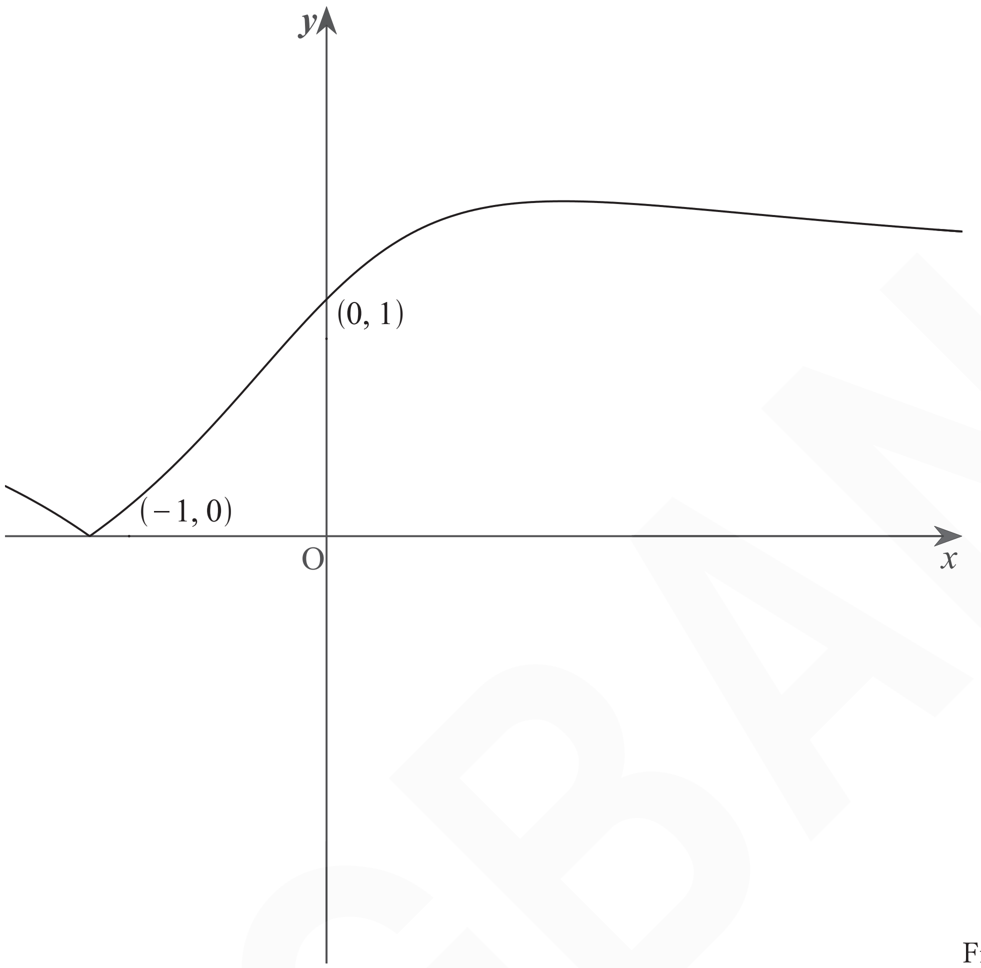

Fig.1

3

(1) m は奇数だから、その約数 $a_1,\ a_2\ ,\ \cdots, a_k$ もすべて奇数である。よって $i<j$ を満たすすべての整数 i, j に対し、$a_j - a_i \geq 2$ が成り立つ。

1) $k \geq 5$ とすると

$$
\begin{aligned}
a_{k-1} - a_2 &\geq\ a_4 - a_2 \\
&=\ (a_4 - a_3) +\ (a_3 - a_2) \\
&\geq 2 + 2 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

となり条件(ⅱ)に反する。よって $k \leq 4$ である。

2) $m\ (\geq 3)$の素因数分解を

$$m = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times\ \cdots\ \times {p_n}^{\alpha_n}$$

とする。ここで $p_i\ (i = 1, 2,\ \cdots, n)$ は各々異なる素数、 $\alpha_i\ (i = 1, 2,\ \cdots, n)$ は 1 以上の整数である。

m の正の約数の個数 k について

$$
\begin{aligned}
k &= (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \times \cdots \times (\alpha_n + 1) \\
&\geq (1+1)(1+1) \times \cdots \times (1+1)\ \ \cdots\cdots(*) \\
&= 2^n \\
&\geq 2\ \cdots\cdots(**)
\end{aligned}
$$

である。 $(*)$ の等号は $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1$ のとき、$(**)$ の等号は $n = 1$ のとき成立するので

$k = 2$ となるのは $m = {p_1}^{\alpha_1} = p_1$ のときであるが、これは条件(ⅰ)に反する。よって$k \neq 2$ である。

1), 2) より$k = 3$ または $k = 4$ である。■

3) $n \geq 3$ とすると $k \geq 2^n \geq 2^3 = 8$ となり $k \leq 4$ に反する。よって $n = 1,\ 2$ であり、$m = {p_1}^{\alpha_1}$ または $m = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}$ である。

$m = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}$ のとき、$k = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \geq (1+1)(1+1) = 4$ であることに注意すると、$k = 3$ となるのは $m = {p_1}^{\alpha_1}\ (\alpha_1 + 1 = 3)$ 、すなわち $m = {p_1}^2$ のときである。

このとき、$a_1 = 1,\ a_2 = p_1,\ a_3 = {p_1}^2 = m$ であるが、$a_j - a_i = a_2 - a_2 = 0 \leq 3$ であり条件(ⅱ)を満たす。よって

$$\boldsymbol{m = {a_2}^2}$$

である。

4) $k = 4$ となるのは $m = {p_1}^{\alpha_1}\ (\alpha_1 + 1 = 4)$ 、または $m = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}\ \big((\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = 4\big)$ 、すなわち $m = {p_1}^3$ または $m =\ p_1 p_2$ のときである。

$m = {p_1}^3$のとき、$a_1 = 1,\ a_2 = p_1,\ a_3 = {p_1}^2, a_4 = {p_1}^3$ であるが、

$$
\begin{aligned}
a_3 - a_2 &=\ {p_1}^2 - p_1 \\
&= p_1(p_1 - 1) \\
&\geq 3 \cdot 2 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

となり、条件(ⅱ)に反する。よって $m = {p_1}^3$ の場合はない。

$m = p_1 p_2$ ($p_1 < p_2$) のとき、$a_1 = 1,\ a_2 = p_1,\ a_3 = p_2,\ a_4 = p_1 p_2 = m$ であるが、

a_2, a_3 は $a_3 - a_2 \leq 3$ を満たす奇数であるから $a_3 - a_2 = 2 \Leftrightarrow a_3 = a_2 + 2$ である。よって、

$$\begin{aligned} m &= p_1 p_2 \\ &= a_2 a_3 \\ &= \boldsymbol{a_2(a_2+2)} \end{aligned}$$

である。

※ 一般に次の事実が知られている。自然数 m の正の約数の個数を k とするとき、

1) $k = 1 \Leftrightarrow m = 1$：正の約数を 1 個もつ自然数 m は 1 に限られる

2) $k = 2 \Leftrightarrow m = p$（$p$ は素数)：正の約数を 2 個もつ自然数 m は素数に限られる

3) $k = 3 \Leftrightarrow m = p^2$（$p$ は素数)：正の約数を 3 個もつ自然数 m は素数の平方に限られる

4) $k = 4 \Leftrightarrow m = p^3$ または $m = pq$ (p, q は異なる素数)：正の約数を 4 個もつ自然数 m は素数の立方または異なる 2 素数の積に限られる

1)〜4)の $\Leftarrow$ については殆ど明らかである。自然数 m が与えられたときに、その約数の個数 k を求める問題は頻出であり、経験済みの受験生も多いだろう。本問ではその逆 $\Rightarrow$ を議論することが求められている。自然数 m の素因数分解を少し拡張して

$$m = 2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2} \times 5^{\alpha_3} \times 7^{\alpha_4} \times \cdots$$

と表すことにする。ここで α_n は 0 以上の整数である。たとえば、

$$\begin{aligned} 1 &= 2^0 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0 \times \cdots \\ 3 &= 2^0 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^0 \times \cdots \\ 504 &= 2^3 \times 3^2 \times 5^0 \times 7^1 \times \cdots \end{aligned}$$

のように形式的な無限積で表示する。このとき自然数 m の約数の個数 k はやはり形式的な無限積

$$k = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \times \cdots \times (\alpha_n + 1) \times \cdots$$

で表される。すると 3)の $\Longrightarrow$ は容易である。

$$3 = (2+1)(0+1)(0+1) \times \cdots \times (0+1) \times \cdots$$

つまり α_n $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ のうち一つだけが 2 でそれ以外は 0 であることが見て取れるだろう。

また 4)の $\Longrightarrow$ も

$$4 = (3+1)(0+1)(0+1) \times \cdots \times (0+1) \times \cdots$$

または

$$4 = (1+1)(1+1)(0+1) \times \cdots \times (0+1) \times \cdots$$

つまり α_n $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ のうち一つだけが 3 でそれ以外は 0 である、または α_n $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ のうち二つだけが 1 でそれ以外は 0 であることが分かるだろう。

1) の $\Longrightarrow$ のように自明なものについても、拡張された素因数分解を用いれば

$$1 = (0+1)(0+1)(0+1) \times \cdots \times (0+1) \times \cdots$$

つまり α_n $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ がすべて 0 であることから $m = 2^0 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0 \times \cdots = 1$ とできる。

(2) p を素数、n を正の整数とするとき、すべての正の整数 r に対し次の命題 $A(r)$

$$A(r):\ (pn+1)^r \equiv rpn+1 \pmod{p^2}$$

がなりたつことを数学的帰納法で示す。

i） $(pn+1)^1 \equiv pn+1 \equiv 1\cdot pn+1 \pmod{p^2}$ であるから $A(1)$ は成り立つ。

ii） $A(k):\ (pn+1)^k \equiv kpn+1 \pmod{p^2}$ が成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned}(pn+1)^{k+1} &\equiv (pn+1)^k(pn+1)\\ &\equiv (kpn+1)(pn+1)\\ &\equiv kp^2n^2+(k+1)pn+1\\ &\equiv (k+1)pn+1 \pmod{p^2}\end{aligned}$$

であり、$A(k+1)$ も成り立つ。

よってすべての正の整数 r に対し $A(r)$ が成り立つ。

$k=3$ のとき、(1) より $a_2=p,\ m=p^2$ であるから、命題 $A(p)$ を用いると

$$\begin{aligned}(a_2n+1)^{a_2} &\equiv (pn+1)^p\\ &\equiv p^2n+1\\ &\equiv 1 \pmod{p^2}\\ &\equiv 1 \pmod{m}\end{aligned}$$

となる。よって $(a_2n+1)^{a_2}-1$ は m で割り切れる。■

※）二項定理を用いて示す手も考えられる。

$$\begin{aligned}(pn+1)^p &= \sum_{k=0}^{p} {}_p\mathrm{C}_k\ p^kn^k\\ &= {}_p\mathrm{C}_0 + {}_p\mathrm{C}_1\,pn + \sum_{k=2}^{p} {}_p\mathrm{C}_k\ p^kn^k\\ &= 1+p^2n+\sum_{k=2}^{p} {}_p\mathrm{C}_k\ p^kn^k\\ &\equiv 1 \pmod{p^2} \quad \left(\because\ {}_p\mathrm{C}_k \in \mathbb{Z}\right)\end{aligned}$$

である。こうする方が普通かもしれない。

4

(1) z は原点を中心とする半径 1 の円周上の点であるから、

$$z=\cos\theta+i\sin\theta$$

と表せる。このとき、

$$\begin{aligned} w&=z+\frac{2}{z}\\ &=\cos\theta+i\sin\theta+\frac{2}{\cos\theta+i\sin\theta}\\ &=\cos\theta+i\sin\theta+2(\cos\theta-i\sin\theta)\\ &=3\cos\theta+i(-\sin\theta) \end{aligned}$$

である。よって、$w=u+vi$（$u,\ v$ は実数)とするとき、

$$\begin{cases} u=3\cos\theta\\ v=-\sin\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta=\dfrac{u}{3}\\ \sin\theta=-v \end{cases}$$

であるから、これを $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入して、

$$\boldsymbol{\frac{u^2}{9}+v^2=1}\ .$$

(2) $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}_1(\beta_1)$, $\mathrm{B}_2(\beta_2)$ とし、$\alpha=a+bi$（a,b は実数)とおく。xy 平面で C および l は

$$C:\ \frac{x^2}{9}+y^2=1$$

$$l:\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

と表せる（t は実数)。点 A $(a,\ b)$ は C の内部の点であるから、

$$\frac{a^2}{9}+b^2<1$$

$$\Leftrightarrow\ a^2+9b^2-9<0\cdots(*)$$

を満たしている。
C と lの共有点 B_1, B_2 に対応するt は 2 次方程式

$$\frac{(a+t\cos\theta)^2}{9}+(b+t\sin\theta)^2=1$$

$$\Leftrightarrow\ (\cos^2\theta+9\sin^2\theta)t^2+2(a\cos\theta+9b\sin\theta)t+a^2+9b^2-9=0$$

の 2 解であり、それを s_1, s_2 とすると $\mathrm{AB}_1=|s_1|$, $\mathrm{AB}_2=|s_2|$ である。よって、

$$
\begin{aligned}
|\,\beta_1-\alpha\,|\cdot|\,\beta_2-\alpha\,| &= \mathrm{AB}_1\cdot\ \mathrm{AB}_2\\
&= |\,s_1\,||\,s_2\,|\\
&= |\,s_1\,s_2\,|\\
&= \left|\frac{a^2+9b^2-9}{\cos^2\theta+9\sin^2\theta}\right|\\
&= \frac{9-a^2-9b^2}{\cos^2\theta+9\sin^2\theta}\quad (\because\ (*))\\
&= \frac{9-a^2-9b^2}{1+8\sin^2\theta}\\
&\leq 9-a^2-9b^2
\end{aligned}
$$

である。上の不等式の等号は $\theta=0$ で成り立つ。

よって $|\,\beta_1-\alpha\,|\cdot|\,\beta_2-\alpha\,|$ は **$\boldsymbol{l}$ が実軸に平行なとき**最大となる。