2022年度私大医学部入試
解答速報（解説付き）

日本医科大学(後期)【数学】

解答速報 実施大学

◆杏林(医)	◆昭和(医/Ⅰ期)	◇埼玉医科(後期)
◆東北医科薬科(医)	◆東京医科	◇日本医科(後期)
◆関西医科(前期)	◆埼玉医科(前期)	◇昭和医科(II期)
◆近畿(医/前期)	◆東京慈恵会医科	
◆日本医科(前期)	◆大阪医科薬科(医/前期)	

講評

Ⅰ　複素数と方程式	難易度：標準
整式の割り算がテーマである。計算するだけの問題で特に考えるところはない。落ち着いて処理したい。	
Ⅱ　確率・極限	難易度：標準
確率と極限の融合問題だが、いずれも典型的で手が止まるところはないだろう。全問完答したい。	
Ⅲ　空間図形	難易度：やや難
四面体をテーマとする問題で、問３までは難しいところはない。問４の最大値を求める問題が難しい。試験時間内に完答するのは厳しいだろう。	
Ⅳ　微分法・積分法	難易度：標準
曲線の曲率をテーマとしたよくある問題で、類題を経験していた受験生も多かっただろう。問３までは完答したい。問４の積分計算で差がついたと思われる。	
全体	難易度：標準
テーマ自体は典型的だが、式がゴツく計算力を必要とするのは前期と同様である。典型問題に重たい計算で味付けをするのが日医のカラーということだろう。要領よく計算する技術を身に着けることが大事である。	

Ⅰ

問 1

$$
\begin{aligned}
&(2x-a)^m\\
&=\{2(x-1)+2-a\}^m\\
&=\sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k\ 2^k(x-1)^k(2-a)^{m-k}\\
&={}_m\mathrm{C}_0\ (2-a)^m+{}_m\mathrm{C}_1\ 2(x-1)(2-a)^{m-1}+{}_m\mathrm{C}_2\ 2^2(x-1)^2(2-a)^{m-2}+\sum_{k=3}^{m} {}_m\mathrm{C}_k\ 2^k(x-1)^k(2-a)^{m-k}\\
&=(2-a)^m+2m(2-a)^{m-1}(x-1)+2m(m-1)(2-a)^{m-2}(x-1)^2+\sum_{k=3}^{m} {}_m\mathrm{C}_k\ 2^k(x-1)^k(2-a)^{m-k}
\end{aligned}
$$

であるから、これを $(x-1)^3$ で割った余りは

$$
\begin{aligned}
&(2-a)^m+2m(2-a)^{m-1}(x-1)+2m(m-1)(2-a)^{m-2}(x-1)^2\\
&=(2-a)^{m-2}\{(2-a)^2+2m(2-a)(x-1)+2m(m-1)(x-1)^2\}
\end{aligned}
$$

である。

よって

$$
\begin{aligned}
P_1(m)&=2m(m-1)\\
&=\boldsymbol{2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}}\ ,\\
P_2(m)&=-4m(m-1)+2m(2-a)\\
&=-4m^2+2(4-a)m\\
&=\boldsymbol{-4\left(m-\frac{4-a}{4}\right)^2+\frac{a^2-8a+16}{4}}\ ,\\
P_3(m)&=2m(m-1)-2m(2-a)+(2-a)^2\\
&=2m^2-2(3-a)m+(2-a)^2\\
&=\boldsymbol{2\left(m-\frac{3-a}{2}\right)^2+\frac{a^2-2a-1}{2}}\ .
\end{aligned}
$$

問 2

$$
\frac{4-a}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3-a}{2}-\frac{4-a}{4}=\frac{2-a}{4}
$$

であるから、この数列は公差

$$
\boldsymbol{\frac{2-a}{4}}
$$

の等差数列である。

よって座標平面上の 3 点

$$
\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\qquad \left(\frac{4-a}{4},\frac{a^2-8a+16}{4}\right),\qquad \left(\frac{3-a}{2},\frac{a^2-2a-1}{2}\right)
$$

が同一直線上にあるための a の条件は、3数

$$-\frac{1}{2}, \qquad \frac{a^2-8a+16}{4}, \qquad \frac{a^2-2a-1}{2}$$

がこの順で等差数列をなすことである。すなわち

$$2\frac{a^2-8a+16}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{a^2-2a-1}{2}$$
$$\Leftrightarrow\ a^2-8a+16=a^2-2a-2$$
$$\Leftrightarrow a=\mathbf{3}\ .$$

II

問1

p_n : 取り出した球の色が2種類である確率

q_n : 取り出した球が白黒の2種類である確率

であり、さらに

r_n : 取り出した球が白赤の2種類である確率

s_n : 取り出した球が黒赤の2種類である確率

と定めると

$$q_n=\frac{2\cdot\ {}_n\mathrm{C}_1\ \cdot\ {}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n+3}\mathrm{C}_3}$$
$$=2\cdot n\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{3!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)}$$
$$=\frac{3}{4}\frac{n^2(n-1)}{\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$r_n=s_n=\frac{{}_n\mathrm{C}_1\ \cdot\ {}_3\mathrm{C}_2\ +\ {}_n\mathrm{C}_2\ \cdot\ {}_3\mathrm{C}_1}{{}_{2n+3}\mathrm{C}_3}$$
$$=\left\{3n+3\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right\}\frac{3!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)}$$
$$=\frac{3n(n+1)}{2}\frac{3!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)}$$
$$=\frac{9}{8}\frac{n(n+1)}{\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

であるから、

$$p_n = q_n + r_n + s_n$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{n^2(n-1) + 3n(n+1)}{\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{4} \frac{n^3 + 2n^2 + 3n}{\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\ .$$

問 2

$$\begin{aligned}
\alpha &= \lim_{n\to\infty} q_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4} \frac{n^2(n-1)}{\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4} \frac{1-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{3}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)} \\
&= \boldsymbol{\frac{3}{4}}\ .
\end{aligned}$$

問 3

$$\begin{aligned}
\beta &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha}{p_n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n^3+2n^2+3n}\right\}^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{\left(1+\frac{3}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{1+\frac{2n+3}{n^2}}\right\}^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{3}{2n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n}{\left(1+\frac{2n+3}{n^2}\right)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left\{\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{\frac{2n}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{\left(1+\frac{2n+3}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2n+3}}\right\}^{\frac{2n+3}{n}}} \\
&= \frac{e^{\frac{3}{2}} \cdot e \cdot e^{\frac{1}{2}}}{e^2} \\
&= \boldsymbol{e}\ .
\end{aligned}$$

Ⅲ

問 1

$$\overrightarrow{\mathrm{ML}}=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{MB}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{MC}}+\frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{MD}}=-\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{MD}}$$

である。点 P は平面 LMN 上の点なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MP}}&=s\,\overrightarrow{\mathrm{ML}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{MN}}\\&=s\left(\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right)+t\left(-\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{MD}}\right)\\&=\frac{5}{6}s\,\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\frac{5}{8}t\,\overrightarrow{\mathrm{MD}}+\left(\frac{1}{6}s-\frac{3}{8}t\right)\overrightarrow{\mathrm{MB}}\end{aligned}$$

と表せる。点 P が直線 AD 上にある条件は

$$\frac{5}{6}s+\frac{5}{8}t=1,\qquad \frac{1}{6}s-\frac{3}{8}t=0$$

$$\Leftrightarrow s=\frac{9}{10},\qquad t=\frac{2}{5}\ .$$

このとき、

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{10}\ \overrightarrow{\mathrm{MA}}+\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}\ \overrightarrow{\mathrm{MD}}$$

$$=\frac{3}{4}\ \overrightarrow{\mathrm{MA}}+\frac{1}{4}\ \overrightarrow{\mathrm{MD}}$$

であるから、

$$\frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{AP}}=\mathbf{3}\ .$$

問 2

M を原点とする座標空間において

$\mathrm{A}\,(\,x\cos\theta\,,x\sin\theta,0\,),\mathrm{B}\left(0,0,\sqrt{l^2-x^2}\right),\mathrm{C}\left(0,0,-\sqrt{l^2-x^2}\right),\mathrm{D}\,(\,x\cos\theta\,,-x\sin\theta\,,0)\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

とおける。このとき

$$\mathrm{P}\left(x\cos\theta\,,\frac{1}{2}\,x\sin\theta,0\right)$$

より

$$\mathrm{PD}=\frac{3}{2}x\sin\theta$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PH} &= \mathrm{PD}\cos\theta \\
&= \frac{3}{2}x\sin\theta\cos\theta\ .
\end{aligned}
$$

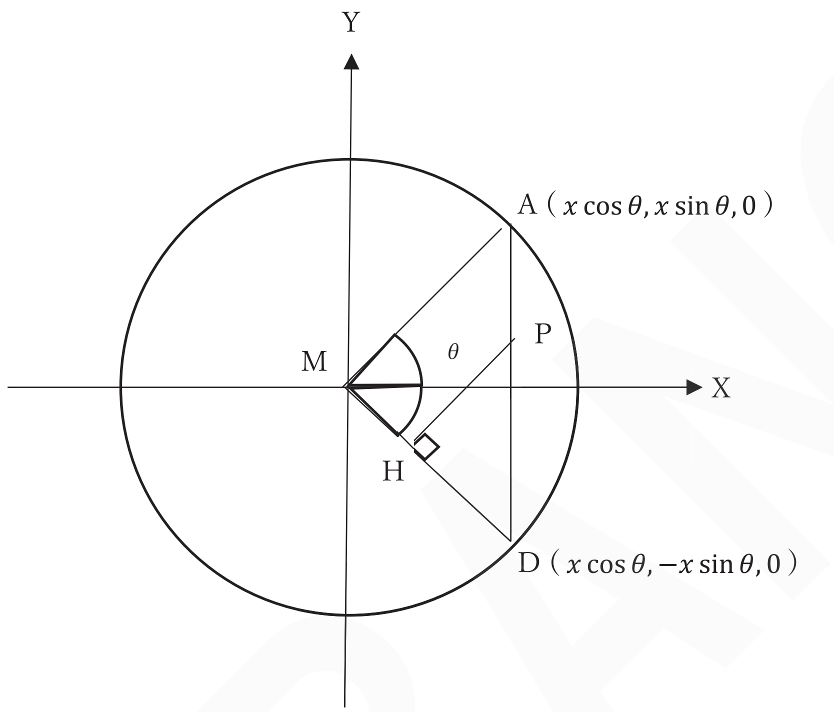

図 1

よって

$$\mathrm{PH} = \frac{l}{2} \Leftrightarrow 3x\sin\theta\cos\theta = l\ .$$

なので

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{l}{3\sin\theta\cos\theta} \\
&= \frac{2l}{3\sin 2\theta} \cdots (1) \\
&\geq \frac{2}{3}l\ .
\end{aligned}
$$

また直角三角形 ABM において、$\mathrm{AM} < \mathrm{AB} \Leftrightarrow x < l$ である。以上より

$$\boldsymbol{\frac{2}{3}l \leq x < l}\ . \cdots (2)$$

問３

　Vは四面体 MDAB の体積の２倍であるから

$$V = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}x^2\sin 2\theta\cdot\sqrt{l^2-x^2}$$

$$=\frac{1}{3}x^2\frac{2l}{3x}\sqrt{l^2-x^2}\quad(\because(1))$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{9}lx\sqrt{l^2-x^2}}\ .$$

問４

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MD}}\geq 0\iff 0<\theta\leq\frac{\pi}{4}\ .\cdots(3)$$

である。

　２点 A、D の中点を K とすると、△ABD は二等辺三角形であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\geq\frac{2}{3}$$

$$\iff \mathrm{AK}\times\mathrm{AD}\geq\frac{2}{3}$$

$$\iff 2x^2\sin^2\theta\geq\frac{2}{3}\quad.\cdots(4)$$

(1), (3), (4)より

$$\begin{cases}\sin 2\theta=\dfrac{2l}{3x}\\ x^2(1-\cos 2\theta)\geq\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\cos 2\theta=\sqrt{1-\dfrac{4l^2}{9x^2}}\\ 1-\dfrac{2}{3x^2}\geq\cos 2\theta\end{cases}\cdots(5)$$

である。

$$x\geq\frac{2}{3}l$$

$$\geq\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

より

$$1-\frac{2}{3x^2}\geq 0$$

であることに注意する。(5)を満たす x は

$$1-\frac{2}{3x^2} \geq \sqrt{1-\frac{4l^2}{9x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{2}{3x^2}\right)^2 \geq 1-\frac{4l^2}{9x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9x^4}-\frac{4}{3x^2} \geq -\frac{4l^2}{9x^2}$$

$$\Leftrightarrow 1-3x^2 \geq -l^2x^2$$

$$\Leftrightarrow (3-l^2)x^2 \leq 1 \quad . \cdots (6)$$

i) $l \geq \sqrt{2}$

このとき

$$\frac{2}{3}l \leq \frac{l}{\sqrt{2}} < l \quad \land \quad (3-l^2)\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 \leq 1$$

であり、$x = l/\sqrt{2}$ は(2), (3), (4)すなわち(2),(6)を満たす。実際、

$$l^2 \geq 2$$

より

$$(l^2-1)(l^2-2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow l^4-3l^2+2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3-l^2)l^2 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow (3-l^2)\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 \leq 1$$

である。

$$V = \frac{2}{9}lx\sqrt{l^2-x^2}$$

$$= \frac{2}{9}l\sqrt{x^2(l^2-x^2)}$$

$$\leq \frac{2}{9}l\,\frac{x^2+(l^2-x^2)}{2} \quad \cdots (7)$$

$$= \frac{1}{9}l^3 .$$

(7)の等号は

$$x = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

のとき成り立つので

$$V_{\max} = \frac{1}{9}l^3 \ .$$

ii) $\dfrac{\sqrt{6}}{2} \leq l \leq \sqrt{2}$

このとき

$$\begin{aligned} &1 \leq l^2 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow (l^2-1)(l^2-2) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow l^4-3l^2+2 \leq 0 \quad \cdots (8) \end{aligned}$$

なので

$$l^4-3l^2+1 < l^4-3l^2+2 \leq 0 \ .$$

すなわち

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\sqrt{3-l^2}}\right)^2 - l^2 \\ &= \frac{1-l^2(3-l^2)}{3-l^2} \\ &= \frac{l^4-3l^2+1}{3-l^2} \\ &< 0 \ . \end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{\sqrt{3-l^2}} < l$$

であるから、(2)かつ(6)を満たす x について

$$\frac{2}{3}l \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3-l^2}}$$

すなわち

$$\frac{4}{9}l^2 \leq x^2 \leq \frac{1}{3-l^2} \quad \cdots (9)$$

が成り立つ。また、(8)より

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3-l^2} - \frac{l^2}{2} \\ &= \frac{2-l^2(3-l^2)}{2(3-l^2)} \\ &= \frac{l^4-3l^2+2}{2(3-l^2)} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{1}{3-l^2} \leq \frac{l^2}{2}$$

であることに注意する。(9)の範囲で

$$V = \frac{2}{9}lx\sqrt{l^2 - x^2}$$

$$= \frac{2}{9}l\sqrt{x^2(l^2 - x^2)}$$

$$\leq \frac{2}{9}l\sqrt{\frac{1}{3 - l^2}\left(l^2 - \frac{1}{3 - l^2}\right)}$$

$$= \frac{2l\sqrt{-l^4 + 3l^2 - 1}}{9(3 - l^2)}$$

であるから

$$V_{\max} = \frac{2l\sqrt{-l^4 + 3l^2 - 1}}{9(3 - l^2)} \ .$$

i), ii) より

$$\boldsymbol{V_{\max}} = \begin{cases} \boldsymbol{\frac{1}{9}l^3} \ \ (\boldsymbol{l \geq \sqrt{2}}) \\ \boldsymbol{\frac{2l\sqrt{-l^4 + 3l^2 - 1}}{9(3 - l^2)}} \ \ \left(\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2} \leq l \leq \sqrt{2}}\right) \end{cases} .$$

IV

問 1

点 A における C の接ベクトル $\vec{a}$ は

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

である。点 A における C の法線上の任意の点を Q (x, y) とすると、

$$\begin{aligned} & \vec{a} \perp \overrightarrow{\mathrm{AQ}} \\ \Leftrightarrow\ & \vec{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - t \\ y - f(t) \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x - t + f'(t)\big(y - f(t)\big) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \boldsymbol{x + f'(t)y = t + f(t)f'(t)} \ . \end{aligned}$$

問 2

点 P(h) の座標は連立方程式

$$\begin{cases} x + f'(t+h)y = t + h + f(t+h)f'(t+h) \\ x + f'(t)y = t + f(t)f'(t) \end{cases}$$

の解なので、点 P(h) の y 座標は

$$\{f'(t+h)-f'(t)\}y = h + f(t+h)f'(t+h) - f(t)f'(t)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{f'(t+h)-f'(t)}{h}y = 1 + \frac{f(t+h)f'(t+h)-f(t)f'(t)}{h}\ \ \cdots(1)$$

を満たす。 よって

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(t+h)-f'(t)}{h}y = 1 + \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)f'(t+h)-f(t)f'(t)}{h}$$

であるから、点 P の座標を P (α,β) とすると

$$\begin{aligned} f''(t)\beta &= 1 + \{f(t)f'(t)\}' \\ &= 1 + \{f'(t)\}^2 + f(t)f''(t) \\ \Leftrightarrow\ \beta &= f(t) + \frac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}\ \ \cdots(1)\,. \end{aligned}$$

点 A における C の法線の方向ベクトルを $\vec{b}$ とすると

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -f'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

を選ぶことができ、$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\vec{b}$ を満たす。よって

$$\begin{pmatrix} \alpha - t \\ \beta - f(t) \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -f'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - kf'(t) \\ f(t) + k \end{pmatrix} \cdots(2)$$

である。(1), (2) より

$$k = \frac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}$$

なので、点 P の座標は

$$\boldsymbol{\left(t - \frac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}f'(t)\,,\, f(t) + \frac{1+\{f'(t)\}^2}{f''(t)}\right)}\,.$$

問 3

$$\begin{aligned} R(t) &= \left|\,\overrightarrow{\mathrm{AP}}\,\right| \\ &= \left| k\begin{pmatrix} -f'(t) \\ 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= |k|\sqrt{1+\{f'(t)\}^2} \\ &= \boldsymbol{\frac{\{1+\{f'(t)\}^2\}^{\frac{3}{2}}}{f''(t)}}\ . \end{aligned}$$

問4

$$f(x)=\int_0^x \sqrt{e^{2t}-1}\,dt$$

$$f'(x)=\sqrt{e^{2x}-1}$$

$$f''(x)=\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

である。よって

$$\begin{aligned}
I&=\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\frac{1}{R(t)}\,dt\\
&=\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\frac{f''(t)}{\{1+\{f'(t)\}^2\}^{\frac{3}{2}}}\,dt\\
&=\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\frac{1}{e^{3t}}\cdot\frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}-1}}\,dt\\
&=\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\frac{1}{e^{t}\sqrt{e^{2t}-1}}\,dt\\
&=\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\frac{2e^{-2t}}{2\sqrt{1-e^{-2t}}}\,dt\\
&=\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\frac{(1-e^{-2t})'}{2\sqrt{1-e^{-2t}}}\,dt\\
&=\int_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\left(\sqrt{1-e^{-2t}}\right)'\,dt\\
&=\left[\sqrt{1-e^{-2t}}\right]_{\frac{1}{2}}^{\log 2}\\
&=\sqrt{1-\frac{1}{4}}-\sqrt{1-\frac{1}{e}}\\
&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{1-\frac{1}{e}}}\ .
\end{aligned}$$