2022年度私大医学部入試
解答速報（解説付き）

埼玉医科大学(後期)【数学】

解答速報 実施大学

◆杏林(医)　◆昭和(医/Ⅰ期)　◇埼玉医科(後期)
◆東北医科薬科(医)　◆東京医科　◇日本医科(後期)
◆関西医科(前期)　◆埼玉医科(前期)　◇昭和医科(II期)
◆近畿(医/前期)　◆東京慈恵会医科
◆日本医科(前期)　◆大阪医科薬科(医/前期)

講評

1　小問集合	難易度：やや易
問 1 の複素数平面、問 2 の平面図形 いずれもよくある典型問題で、確実に正解したい。この辺の問題を取りこぼすと合格は厳しいだろう。	
2　微分法・積分法	難易度：やや易
分数関数のグラフを主役にした微積分の問題。方針が立てやすく、計算も容易である。しかし計算が下手すぎると正解に辿り着けない可能性もある。計算量を軽減する技術を磨いておくことが大切である。	
3　数列	難易度：易
数列の一般項と和に関する教科書レベルの易問である。マーク式という特性も利用すればわからなくても正解できる設問すらある。完答必須と言っていいだろう。	
4　確率	難易度：やや難
ワクチンという時事的なテーマと条件付き確率を融合させた問題で、出題者のやる気は感じられるが、数学的な内容には乏しい。見慣れないタイプの問題であり、限られた時間の中で正解するのは厳しいかもしれない。	
全体	難易度：やや易
全体を通して易しいが、最後の大問 4 の分だけやや難化した。大問 1〜3 の出来具合が合否を分けるだろう。1 次合格ラインは 58%くらいか。	

$\boxed{1}$

問 1

$$
\begin{aligned}
z &= 1+\cos\theta+i\sin\theta \\
&= 2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\
&= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned}
$$

$-\pi<\theta<\pi$ より

$$2\cos\frac{\theta}{2}>0,\qquad -\pi<-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}<\pi$$

であるから、

$$r=\boldsymbol{2\cos\frac{\theta}{2}}\,,\qquad \alpha=\boldsymbol{\frac{\theta}{2}}\ .$$

ド・モアブルの定理より

$$z^{32}=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{32}(\cos 16\theta+i\sin 16\theta)$$

である。

$$
\begin{aligned}
&z^{32}\text{が純虚数}\Leftrightarrow z^{32}\text{の実部が }0 \\
&\Leftrightarrow \cos 16\theta=0 \\
&\Leftrightarrow 16\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi\ \ (n\in\mathbb{Z})\cdots(1)
\end{aligned}
$$

であるが、$-16\pi<16\theta<16\pi$ により(1)を満たす θ が存在する条件は

$$
\begin{aligned}
&-16\pi<\frac{\pi}{2}+n\pi<16\pi \\
&\Leftrightarrow -16-\frac{1}{2}<n<16-\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow -16\le n\le 15
\end{aligned}
$$

である。よってz^{32}が純虚数となる θ は **32 個**である。

※　大学以降の数学では「z が純虚数 $\Leftrightarrow$ z の実部が 0 」とするのが普通である。つまり 0 は実数であると同時に純虚数でもあるという立場をとる。しかし、これが生徒を混乱させるという判断なのか、高校数学では「z が純虚数 $\Leftrightarrow$ z の実部が 0 かつ $z\neq 0$ 」とする。 0 は純虚数ではないというのだが、この教育的配慮により純虚数である為の条件が複雑になるのでは本末転倒である。
高校の教科書では、複素数平面を導入する際に「直交座標系の y 軸を虚軸」としている。すなわち複素数 0 に対応する原点は実軸上の点であると同時に虚軸上の点でもあるとしている。それならば 0 を純虚数に含め、虚軸上の点と純虚数を 1 対 1 に対応させる方が明解である。

問２
メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}}=1$$

であり、また辺 AB および辺 BC の内分比についての条件から

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}}=\frac{a}{1},\qquad \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CB}}=\frac{b}{1+b}$$

であるので、

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{b}{1+b}\cdot\frac{a}{1}=1\,.$$

よって、

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}=\boldsymbol{\frac{1+b}{ab}}\;.$$

△APE、△ABD、△ABC の面積をそれぞれ $S,\ T,\ U$ とおくと

$$\begin{aligned}
S&=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}\cdot T\\
&=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}}\cdot U\\
&=\frac{1}{1+a}\cdot\frac{1+b}{1+b+ab}\cdot\frac{1}{1+b}\cdot U\\
&=\frac{U}{(1+a)(1+b+ab)}
\end{aligned}$$

である。

$$\begin{cases} U=30S\\ a+b=5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases} (1+a)(1+b+ab)=30\\ a+b=5\end{cases}\ \cdots(2)$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases} (1+a)(-a^2+4a+6)=30\\ a+b=5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases} a^3-3a^2-10a+24=0\\ a+b=5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases} (a+3)(a-2)(a-4)=0\\ a+b=5\end{cases}\ .$$

よって、求める $a>0,\ b>0$ は、$\boldsymbol{a=2, b=3}$ または $\boldsymbol{a=4, b=1}$ である。

※　解答では a, b が正の実数という与えられた条件だけで解いたが、実際にはマーク式の制限により a, b は正の整数(しかも 1 桁の)ということまで分かっている。また求める a, b の組が 2 組であることも分かっている。このことに注意すると、連立方程式(2)を解くのは簡単である。

条件 $a+b=5$ により $1 \leq a,\ b \leq 4$ であるから、$2 \leq 1+a \leq 5$ である。よって

$$(1+a)(1+b+ab)=30$$
$$\Leftrightarrow\ (1+a, 1+b+ab)=(2,15),(3,10),(5,6)\ .$$

$(1+a, 1+b+ab)=(2,15)$ のとき、$(a, 1+2b)=(1,15) \Leftrightarrow (a,b)=(1,7)$ となるが、この b は $1 \leq b \leq 4$ を満たさない。よって求める a, b は $1+a=3$ または $1+a=5$ の場合となる(求める a, b の組が 2 組あるのだから、これらは 2 つとも条件を満たすはずである)。

$a=2$ または $a=4$ を $a+b=5$ に代入して、それぞれの場合の b を求めればよい。

$\boxed{2}$

問 1

（1）一般に、曲線 $y=g(x)$ を x 軸方向に a 、y 軸方向に b 平行移動して得られる曲線の方程式は $y-b=g(x-a)$ である。曲線 F を

$$F: y-(-a)=\frac{1}{x-(-a)}$$

と変形すれば、これが曲線

$$y=\frac{1}{x}$$

を x 軸方向に $\boldsymbol{-a}$ 、y 軸方向に $\boldsymbol{-a}$ 平行移動して得られる曲線であることがわかる（④)。

（2）

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ a>0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1+a}-a=0 \\ a>0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a+1)=1 \\ a>0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+a-1=0 \\ a>0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow a=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)}.$$

（3）x_1 は方程式 $f(x)=x$ の解であるから

$$f(x_1)=x_1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_1+a}-a=x_1$$
$$\Leftrightarrow (x_1+a)^2=1 \ \wedge \ x_1+a\neq 0$$

を満たす。

$$f'(x)=\frac{-1}{(x+a)^2}$$

より

$$f'(x_1)=\frac{-1}{(x_1+a)^2}$$
$$=\mathbf{-1}\,.$$

（4）A に含まれる円のうち半径が最大のものを S とおく。S は x 軸、y 軸と接し、かつ曲線 F と点 P で接する円である。S の半径を r とおくと、S の中心 C の座標は $\mathrm{C}(r,r)$ とおける。円 S が曲線 F と点 P で接するので、$0<r<x_1 \Leftrightarrow$（$x_1-r>0 \ \wedge \ r>0$）に注意して

$$\mathrm{CP}=r$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{CP}^2=r^2$$
$$\Leftrightarrow 2(x_1-r)^2=r^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(x_1-r)=r$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)r=\sqrt{2}x_1$$
$$\Leftrightarrow r=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)x_1$$
$$=\left(2-\sqrt{2}\right)x_1\,.$$

よって S の中心 C の x 座標は $\boldsymbol{\left(2-\sqrt{2}\right)x_1}$ である。

問 2　領域 A は直線 $y=x$ に関して対称であるから、求める面積は

$$\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{x+a}-a\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\log(x+a)-ax\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+a}{a}-\frac{a}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\log(1+a)^2-\frac{a}{2}\quad\left(\because \frac{1}{1+a}=a\right)$$
$$=\log(1+a)-\frac{a}{2}$$
$$=\boldsymbol{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\frac{1-\sqrt{5}}{4}}\,.$$

$\boxed{3}$

問 1

$$\begin{cases} S_1 = 4 \\ S_2 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_1 + a_2 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \mathbf{4} \\ a_2 = \mathbf{6} \end{cases}.$$

問 2

$$S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + 2$$

と変形すると、

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) \\ &= n(n+1) \ . \end{aligned}$$

問 1 の結果と合わせて

$$a_n = \begin{cases} n(n+1) \quad (n \geq 2) \\ 4 \quad (n = 1) \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned} & a_n = 462 \\ \Leftrightarrow\ & n(n+1) = 21 \cdot 22 = (-22) \cdot (-21) \\ \Leftrightarrow\ & n = 21, -22 \ . \end{aligned}$$

n は自然数なので、$n = \mathbf{21}$.

問 3

$$\begin{aligned} Q_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \\ &= 1 + \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{a_k} \quad (n \geq 2) \\ &= 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{5}{4} + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{5}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{7n+3}{4(n+1)} \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

$$Q_1 = 1 + \frac{1}{a_1}$$

$$= 1 + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{7+3}{4(1+1)}.$$

よって、

$$Q_n = \boldsymbol{\frac{7n+3}{4(n+1)}} \quad (n \geq 1).$$

※ 問３では問２の結果を用いているから、問２が解けないと問３も解けないように思えるかもしれないが、そんなことはない。問１さえ解けていれば、問３も簡単に解けてしまう。

$$Q_n = \frac{an+b}{c(n+1)}$$

$$= \frac{a}{c} \cdot \frac{n}{n+1} + \frac{b}{c} \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= A\frac{n}{n+1} + B\frac{1}{n+1}$$

とおく。

$$Q_1 = 1 + \frac{1}{a_1} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \qquad Q_2 = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{17}{12}$$

なので、

$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{5}{4}, \qquad \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B = \frac{17}{12}$$

$$\Leftrightarrow 2A + 2B = 5, \qquad 2A + B = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{7}{4}, \qquad B = \frac{3}{4}\ .$$

よって、

$$Q_n = \frac{7}{4} \cdot \frac{n}{n+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{7n+3}{4(n+1)}\ .$$

マーク式なので Q_n の形が与えられており、その未知数が２つしかない。２つの未知数は２つの条件によって確定するが、２つの条件は問１で得られている。これでは真面目に解くより簡単に解けてしまう。マークする式の作り方が甘いということである。このように作りが甘い問題はわからなくても正解することができるので、途中の問題ができなくても諦めてはいけない。

$\boxed{4}$

問 1

事象 A ：非感染者 S 人の中から無作為に選んだ人が感染する可能性のない人である

事象 B ：非感染者 S 人の中から無作為に選んだ人が過去にも感染しておらず、かつワクチン接種を受けた人である

とすると、

事象 $A \cap B$ ：非感染者 S 人の中から無作為に選んだ人が過去にも感染しておらず、かつワクチン接種を受けていて(その効果により)感染する可能性がない人である

となる。

$$P(A) = qv(1 - p_0) + p_0, \qquad P(A \cap B) = qv(1 - p_0)$$

より、

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{qv(1 - p_0)}{qv(1 - p_0) + p_0} \\ &= \frac{10q \cdot 10v \cdot (10 - 10p_0)}{10q \cdot 10v \cdot (10 - 10p_0) + 1000\,p_0} \\ &= \frac{9 \cdot 6 \cdot (10 - 2)}{9 \cdot 6 \cdot (10 - 2) + 200} \\ &= \frac{54}{54 + 25} \\ &= \boldsymbol{\frac{54}{79}}\ . \end{aligned}$$

問 2　感染を拡大させず縮小させる、すなわち感染者の人数 I が減少する条件は

$$\begin{aligned} &D < 0 \\ \Leftrightarrow\ & a(1 - p)SI - bI < 0 \quad \cdots (3) \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} p &= qv(1 - p_0) + p_0 \\ &= \frac{9}{10}v(1 - 0) + 0 \\ &= \frac{9}{10}v \end{aligned}$$

および $I = 1$ を(3)に代入し

$$\frac{aS}{b} = \frac{12}{5}$$

を用いると

$$a\left(1-\frac{9}{10}v\right)S-b<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{aS}{b}\left(1-\frac{9}{10}v\right)<1$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{5}\left(1-\frac{9}{10}v\right)<1$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{9}{10}v<\frac{5}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{10}v>\frac{7}{12}$$

$$\Leftrightarrow v>\boldsymbol{\frac{35}{54}}\,.$$

※　問題文の前半を解読すると以下のようになる。

非感染者 S 人のうち、過去に感染した人が p_0S 人、過去にも感染していない人が $(1-p_0)\,S$ 人。

過去に感染して回復した p_0S 人の人達は再び感染することはない…①

問題では「非感染者のうち過去に感染した人」と「非感染者のうち過去に感染して回復した人」は同じ意味で使っている。過去に感染したが今は非感染者ということは回復したのだと読み取れる。ただ表現を使い分ける意味はよくわからないところだ。

過去にも感染していない非感染者 $(1-p_0)\,S$ 人のうち、ワクチン接種を受けた人が $v(1-p_0)\,S$ 人。

この人達のうちワクチン接種の効果により感染しなくなる人が $qv(1-p_0)\,S$ 人…②

非感染者 S 人のうち、今後感染することがない人は $qv(1-p_0)\,S+\,p_0S$ 人である(①+②)。よって非感染者 S 人の中から無作為に選んだ 1 人が感染する可能性のない人である確率 p は

$$p=qv(1-p_0)+\,p_0$$

である。

「過去に感染しておらず、ワクチン接種も受けていない人は、全て同様に感染しうる」は、次のような意味だろう。過去も感染していない非感染者 $(1-p_0)\,S$ 人のうちワクチン接種を受けていない $(1-v)(1-p_0)\,S$ 人の人達は、どの人も(全て)・等しく(同様に)・感染する可能性がある。

何と「同様に」なのかは書かれていない。確率では「同様に確からしい」という言い方をするが、それと同じ使い方のつもりなのだろう。しかしワクチン接種に効果がない場合、ワクチン接種を受けていない人がワクチン接種を受けた人と「同様に」感染するということもある。接種を受けた人が感染しなくなる確率を問題では q と表しているが、リード文の段階では $q=0$ の可能性もあるのだから。ワクチン接種には効果があると言うのであれば $q>0$ とする必要がある。

感染症の流行過程を記述する数理モデルの一つに SIR モデルというものがあるが、本問のネタ元はそれだろう。コロナ感染が大きな問題になっている折でもあり作問意図はわからなくもない。しかし本問が確率を勉強してきた受験生の努力を反映するものかという疑問が残る。