2022年度私大医学部入試
解答速報（解説付き）

昭和大学(医・I期)【数学】

【 講 評 】

<table>
<tr><td>$\boxed{1}$</td><td>複素数平面</td><td>難易度：標準</td></tr>
<tr><td colspan="3">複素数平面の標準的な問題であった。複素数平面を苦手とする受験生が多いため、この問題が解けたかどうかで点差が開くであろう。図形的に処理することができなくても式変形で解けるため、図形が苦手な受験生は数式で解き切る練習をしておこう。</td></tr>
<tr><td>$\boxed{2}$</td><td>ベクトル</td><td>難易度：標準</td></tr>
<tr><td colspan="3">三角形についての基本的な問題。図形の性質を理解し、立式の方法がわかれば簡単に解ける問題であった。内積の図形的な意味を十分に理解していれば正射影ベクトルの考え方はすぐにわかるはずである。</td></tr>
<tr><td>$\boxed{3}$</td><td>(1) 図形と方程式・極限　(2) 積分漸化式</td><td>難易度：標準</td></tr>
<tr><td colspan="3">(1) は極限の式変形の仕方になれていない受験生には難しかったであろう。(2) は標準的な積分漸化式の問題であった。受験生なら一度は触れたことがあるに違いない。解けなかった受験生は演習不足と言わざるを得ない。</td></tr>
<tr><td>$\boxed{4}$</td><td>場合の数</td><td>難易度：標準</td></tr>
<tr><td colspan="3">(1) は絶対に落としてはいけない問題である。(2) は数値こそ大きいものの、(2-4) 以外は簡単な問題であった。(2-4) の場合分けで間違えてしまった受験生も多いと思われる。計算ミスすることなく落ち着いて数え上げたい。</td></tr>
<tr><td colspan="2">全体</td><td>難易度：標準</td></tr>
<tr><td colspan="3">十分演習を積んでいれば解けるセットであった。どれも標準的な難易度であったため、解けない問題があった場合はよく復習しておこう。</td></tr>
</table>

【 解 答 ・ 解 説 】

$\boxed{1}$

ド・モアブルの定理より

$$z^3 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

したがって、

$$2\alpha z^3 = (1-t)\alpha + t \iff (1-\alpha)t = \alpha\sqrt{3}i$$

$\alpha = 1$ のとき、$0 = \sqrt{3}i$ となり矛盾。したがって、$\alpha \neq 1$ である。このとき、

$$t = \frac{\alpha\sqrt{3}i}{1-\alpha}$$

は実数であるから、

$$\frac{\alpha\sqrt{3}i}{1-\alpha} = \overline{\left(\frac{\alpha\sqrt{3}i}{1-\alpha}\right)} = -\frac{\overline{\alpha}\sqrt{3}i}{1-\overline{\alpha}} \iff \frac{\alpha}{1-\alpha} = -\frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} \iff \left|\alpha - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

したがって、α は $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ の円を描く。ただし、点 $\mathbf{1}$ を除く。

$$\beta = \frac{z^6}{\alpha} \iff \alpha = \frac{z^6}{\beta}$$

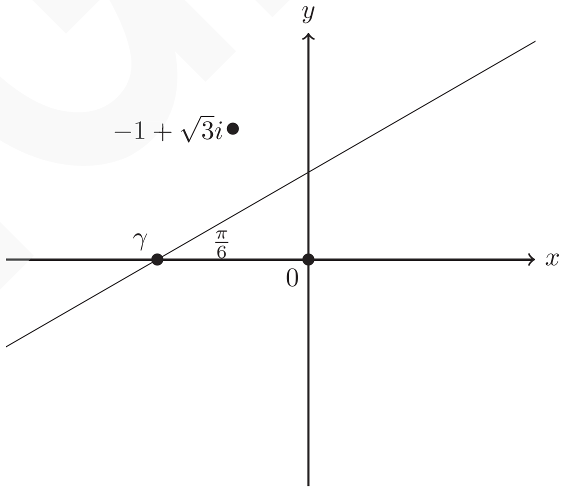
より、$\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ に代入して、

$$\left|\frac{z^6}{\beta} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \iff \left|\beta - 2z^6\right| = |\beta|$$

ここで、ド・モアブルの定理より

$$z^6 = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

であるから、β は原点と $-1+\sqrt{3}i$ を結ぶ線分の垂直二等分線上にある。図より $\gamma = \mathbf{-2}$.



このとき、

$$1 - \frac{z^6}{\gamma} = 1 + \frac{z^6}{2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

より、

$$\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}.$$

$\boxed{2}$

(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right|$ より $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{b}\right|^2 - 2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} - \left|\overrightarrow{a}\right|^2$ であるから、$3 = 9 - 2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$. したがって、$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \mathbf{3}$.

(2) 点 B から線分 OA に下ろした垂線の足を P、点 A から線分 OB に下ろした垂線の足を Q とする。このとき、

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|^2}\overrightarrow{a} = \frac{3}{4}\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|^2}\overrightarrow{b} = \frac{3}{5}\overrightarrow{b}$$

である。点 H は線分 AQ 上の点であるから、t を実数として、

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = t\overrightarrow{a} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{4}{3}t\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{3}{5}(1-t)\overrightarrow{b}$$

と表せる。ここで、点 H は線分 PB 上の点でもあるから、$\frac{4}{3}t + \frac{3}{5}(1-t) = 1$. したがって、$t = \frac{6}{11}$. よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{11}}\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{11}}\overrightarrow{\boldsymbol{b}}.$$

(3) (a) 点 D は線分 OH 上の点であるから、実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = k\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{6}{11}k\overrightarrow{a} + \frac{3}{11}k\overrightarrow{b}$$

と表せる。$\frac{6}{11}k + \frac{3}{11}k = 1$ より $k = \frac{11}{9}$. したがって、

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}$$

であるから、点 D は線分 AB を 1:2 に内分する点である。ゆえに、

$$l_1 = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}.$$

(b) △ODA に対して、三平方の定理より

$$l_2 = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{\mathbf{33}}}{\mathbf{3}}.$$

(4) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とする。このとき、

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|} = \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

$\sin\theta > 0$ より $\sin\theta = \frac{\sqrt{55}}{10}$ であるから、正弦定理より

$$R = \frac{\mathrm{AB}}{2\sin\theta} = \frac{\sqrt{\mathbf{165}}}{\mathbf{11}}.$$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = u\overrightarrow{a} + v\overrightarrow{b}$ とする。このとき、

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{a} = u\left|\overrightarrow{a}\right|^2 + v\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{a}\right|^2 = 2$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{b} = u\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + v\left|\overrightarrow{b}\right|^2 = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{b}\right|^2 = \frac{5}{2}$$

より、

$$4u + 3v = 2$$
$$3u + 5v = \frac{5}{2}$$

であるから、$u = \frac{5}{22}, v = \frac{4}{11}$. よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{22}}\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{11}}\overrightarrow{\boldsymbol{b}}.$$

$\boxed{3}$

(1)(1-1) $\mathrm{P}(0,t)$ のとき、$\mathrm{Q}\left(\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{2}t,\sin\frac{\pi}{2}t}\right)$. このとき、実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{QR}}=k\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ とおくと、

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\left(-\cos\frac{\pi}{2}t,t-\sin\frac{\pi}{2}t\right).$$

R の x 座標は -1 であり、

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\left(\cos\frac{\pi}{2}t-k\cos\frac{\pi}{2}t,\sin\frac{\pi}{2}t+k\left(t-\sin\frac{\pi}{2}t\right)\right)$$

であることから、

$$-1=\cos\frac{\pi}{2}t-k\cos\frac{\pi}{2}t \iff k=1+\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}t}$$

したがって、Q の y 座標は

$$(1-k)\sin\frac{\pi}{2}t+kt=-\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}t}\cdot\sin\frac{\pi}{2}t+t+\frac{t}{\cos\frac{\pi}{2}t}=\frac{t+t\cos\frac{\pi}{2}t-\sin\frac{\pi}{2}t}{\cos\frac{\pi}{2}t}$$

したがって、$\mathrm{R}\left(\boldsymbol{-1,\frac{t+t\cos\frac{\pi}{2}t-\sin\frac{\pi}{2}t}{\cos\frac{\pi}{2}t}}\right)$.

(1-2) $t\to1$ のとき、$u=1-t$ とおくと、$u\to0$ であり、

$$\begin{aligned}\frac{t+t\cos\frac{\pi}{2}t-\sin\frac{\pi}{2}t}{\cos\frac{\pi}{2}t}&=\frac{(1-u)+(1-u)\cos\frac{\pi}{2}(1-u)-\sin\frac{\pi}{2}(1-u)}{\cos\frac{\pi}{2}(1-u)}\\&=\frac{(1-u)+(1-u)\sin\frac{\pi}{2}u-\cos\frac{\pi}{2}u}{\sin\frac{\pi}{2}u}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{2}u}{\sin\frac{\pi}{2}u}+(1-u)-\frac{u}{\sin\frac{\pi}{2}u}\\&=\frac{\sin\frac{\pi}{2}u}{1+\cos\frac{\pi}{2}u}+1-u-\frac{\frac{\pi}{2}u}{\sin\frac{\pi}{2}u}\cdot\frac{2}{\pi}\to\frac{0}{1+1}+1-0-1\cdot\frac{2}{\pi}=1-\frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

したがって、点 R は $\left(\boldsymbol{-1,1-\frac{2}{\pi}}\right)$ に近づく。

(2)(2-1) $I_1=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ において、$x=\sin\theta$ とおくと、

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\cos\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}.$$

(2-2)

$$\begin{aligned}I_{n+2}&=\int_0^1\left(1-x^2\right)^{\frac{n+2}{2}}dx=\left[x\left(1-x^2\right)^{\frac{n+2}{2}}\right]_0^1+(n+2)\int_0^1x^2(1-x^2)^{\frac{n}{2}}dx\\&=(n+2)\int_0^1\left\{1-\left(1-x^2\right)\right\}\left(1-x^2\right)^{\frac{n}{2}}dx=(n+2)\left(I_n-I_{n+2}\right)\end{aligned}$$

したがって、

$$\boldsymbol{I_{n+2}=\frac{n+2}{n+3}I_n}.$$

(2-3) (2-1),(2-2) より

$$I_5=\frac{5}{6}I_3=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}I_1=\boldsymbol{\frac{5}{32}\pi}.$$

$\boxed{4}$

(1) SHOWA の 5 文字を並べてできる順列の総数は $5! = 120$. したがって、120 通り。

(2)(2-1) 順列の総数は

$$\frac{10!}{2!2!2!} = 453600.$$

したがって、**453600** 通り。

(2-2) SS と TT をそれぞれ 1 文字と見なして並び替えると

$$\frac{8!}{2!} = 20160.$$

したがって、**20160** 通り。

(2-3) SHSH を 1 文字と見なして並び替えたとき、この文字列を含む順列の総数は

$$\frac{7!}{2!} = 2520.$$

したがって、$453600 - 2520 =$ **451080** 通り。

(2-4) 補集合は S と T が隣り合わないとき。これは

- S も T もすべて隣り合わないとき
- S 同士は隣り合うが、T 同士は隣り合わないとき
- S 同士は隣り合わないが、T 同士は隣り合うとき
- S 同士も T 同士も隣り合うとき

の 4 つの場合に分けられる。

S も T もすべて隣り合わないとき

$$\frac{6!}{2!} \cdot {}_7\mathrm{C}_4 \cdot \frac{4!}{2!2!} = 75600$$

S 同士、あるいは T 同士だけが隣り合うとき

$$\frac{6!}{2!} \cdot {}_7\mathrm{C}_3 \cdot 3 = 37800$$

S 同士も T 同士も隣り合うとき、

$$\frac{6!}{2!} \cdot {}_7\mathrm{C}_2 \cdot 2 = 15120$$

したがって、補集合の順列の総数は

$$75600 + 2 \times 37800 + 7560 = 166320$$

したがって、求める数は

$$453600 - 166320 = 287280$$

より **287280** 通り。